THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée
A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Monsieur Michel SERFATI

pour obtenir
le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : CONTRIBUTION A L'ETUDE DES MATRICES BOOLEENNES ET POSTIENNES

Soutenue le 25 Avril 1972

devant la Commission D'Examen

MM.	DUGUE	Président
	KREWERAS	Examinateurs
	VILLE	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544720_0010

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée
A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Monsieur Michel SERFATI

pour obtenir
le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : CONTRIBUTION A L'ETUDE DES MATRICES BOOLEENNES ET POSTIENNES

Soutenue le 25 Avril 1972

devant la Commission D'Examen

MM.	DUGUE	Président
	KREWERAS	Examinateurs
	VILLE	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

INTRODUCTION

La théorie des Algèbres de Boole est au carrefour de deux théories : d'abord et surtout celle des structures ordonnées (dont elle constitue en quelque sorte un exemple achevé), ensuite celle des modules avec laquelle elle présente maintes analogies. Cette rencontre se manifeste à l'évidence dans l'étude des matrices booléennes où la propriété essentielle est au fond très simple : c'est la compatibilité du produit matriciel et de l'ordre booléen.

Les premiers résultats de quelque importance en ce qui concerne les matrices booléennes sont dus à Wedderbrun [W2] qui traite incidemment du problème de l' inversion des matrices à propos d'un article par ailleurs consacré à l'"Algèbre linéaire Booléenne". L'Algèbre de Boole semble ensuite un peu tombée en défaveur et ce n'est, le plus souvent que par le biais de la Logique que sont abordées, à l'occasion les questions booléennes, à l'exception naturellement du cas bivalent, auquel les nécessités de la technique ont donné un grand développement.

C'est à D.E. Rutherford de l'Université de St Andrews que l'on doit la première approche véritablement algébrique des problèmes matriciels booléens, dans une série d'articles publiés à partir de 1963. L'oeuvre de Rutherford à laquelle il sera maintes fois fait référence dans le présent travail, a été interrompue par sa mort prématurée. Le Dr Th. Blyth (de l'Université de St Andrews), qui fut l'éléve de Rutherford nous a précieusement aidé et documenté au début de notre travail : qu'il en soit ici remercié. Nous pensons que l'élargissement des propriétés matricielles vers les Algèbres de Post aurait été le prolongement naturel du travail de Rutherford. C'est ce que nous avons tenté dans le dernier chapitre.

.../...

Monsieur le Professeur Dugué nous a apporté un soutien constant dans la direction de cette thèse. Nous le prions d'accepter l'expression de notre plus sincère reconnaissance.

Je tiens également à remercier ici Monsieur Ville et Monsieur Kreweras (respectivement rapporteur et examinateur de cette thèse) pour la bienveillante attention qu'ils ont apportée à mon travail.

Enfin, nous n'aurons garde d'oublier Messieurs Lefur et Messeri, qui ont accepté la tâche ingrate de relire les démonstrations.

.../...

Le premier chapitre développe essentiellement les propriétés de l'ensemble des matrices considéré comme gerbier résidué. La symétrie entre produit matriciel et opération de résiduation conduit à des résultats simples et utiles. Les pseudo-modules sont introduits dans ce chapitre et permettent d'exprimer en termes d'applications les propriétés (formelles) des matrices. Beaucoup reste encore à faire dans ce domaine, notamment en introduisant des changements de coordonnées et en généralisant par exemple le calcul tensoriel booléen étudié en bivalent par Mautner. Les équations dans les pseudo-modules sont rapidement étudiées: elles fournissent une agréable généralisation de la méthode des éliminations successives de Rudéanu, et un moyeh élégant et systématique d'étudier les problèmes de valeurs propres : une technique équivalente semble avoir manqué à Rutherford.

Le second chapitre est consacré à quelques familles de matrices particulières : l'étude des matrices unitaires, par exemple, conduit à une identificatioh de tous les homomorphismes booléens matriciels. Le chapitre qui suit se propose de résoudre certaines équations matricielles et fournit, entre autres choses, une méthode de résolution de l'équation linéaire la plus générale. On aura, auparavant introduit la structure (nouvelle, à notre connaissance) de quasi-pavé qui semble adéquate à la description des ensembles de solutions des équations considérées.

L'étude des problèmes de valeurs propres et de vecteurs propres est un prolongement du travail [R5]. La méthode de résolution des équations dans les pseudo-modules fournit un moyen rapide d'étude, et les applications aux matrices particulières étudiées au chapitre II trouvent tout naturellement leur place.

.../...

Le chapitre V est une étude des Algèbres de Post par la voie booléenne. La structure de sous-diagonale que développe le premier paragraphe fournit un outil analytique très simple, grâce au théorême de représentation donné en [V - B3]. Presque tous les problèmes matriciels booléens précédemment développés y trouvent leur prolongement.

Table des Matières

Chapitre 0 : Vocabulaire et notations :

Chapitre I : Propriétés générales :

A - Résiduation -
B - Matrices nilpotentes -
C - Pseudo-module sur un treillis -
D - Théorême de Lagrange et Pseudo-Modules -
E - Equations dans les pseudo-modules matriciels -
F - Formes disjonctives et résiduation -
G - Noyau et Image des homomorphismes de pseudo-modules -
H - Pseudo-solutions des équations booléennes

Chapitre II Matrices particulières :

A - Matrices pseudo-orthogonales -
B - Matrices distributives -
C - Matrices unitaires -
D - Matrices symétriques et antisymétriques -
E - Matrices sous-idempotentes -

Chapitre III Equations matricielles :

A - Pavoïdes et quasi-pavés -
B - Equations et inéquations linéaires -
C - Sur certaines équations non linéaires -

.../...

Chapitre IV Valeurs propres, vecteurs propres des matrices booléennes :

A - Intervalle caractéristique -
B - Pseudo-modules propres -
C - Les deux scalaires fondamentaux d'une matrice -
D - Conjuguaison des pseudo-modules propres.

Chapitre V Méthodes booléennes en Algèbres de Post :

A - Sous-diagonales -
B - Algèbres de Post et sous-diagonales -
C - Problèmes matriciels -
D - Problèmes de valeurs propres -
E - Théorême d'Hamilton-Cayley -

Bibliographie

Chapitre 0

Vocabulaire et notations

$(\mathbb{B}, \vee, ., \bar{}, 0, 1)$ sera dans la suite une algèbre de Boole quelconque, non nécessairement finie, ni même complète. On définira

$$a \oplus b = a\bar{b} \vee \bar{a}b \quad \text{(différence symétrique)}$$

La sous-algèbre $\{0,1\}$ sera désignée par $\langle 2 \rangle$. On définit une application (cf. [R2]) :

$$\langle 2 \rangle \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B} \qquad (\alpha, z) \longrightarrow z^{\alpha}$$

par $\qquad z^1 = z \quad$ et $\quad z^0 = \bar{z}$

On la prolongera en une application de $\langle 2 \rangle^n \times \mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$ par

$$(\alpha, z) \longrightarrow z^{\alpha} \qquad \text{où}$$

$$z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} \ldots\ldots z_n^{\alpha_n}$$

on a $\qquad z^{\alpha} = 1 \longleftrightarrow \alpha = z \qquad (0\text{-}1)$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définira les n projections comme les applications de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$:

$$e_i(x) = x_i \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad (0\text{-}2)$$

Un polynôme booléen à n variables est un élément de la sous-algèbre engendrée dans $(\mathbb{B})^{\mathbb{B}^n}$ par la famille des projections, $\widetilde{\Pi}_n(\mathbb{B})$ désignera l'ensemble des polynômes booléens à n variables.

.../...

Le théorême de Lagrange s'écrira :

$$\left(\forall f \in \Pi_n(\mathbb{B})\right)\left(\forall x \in \mathbb{B}^n\right) : f(x) = \bigvee_{\alpha \in \langle 2 \rangle^n} x^{\alpha} f(\alpha) \qquad (o\text{-}3)$$

Une équation (resp. inéquation) sera dite algébrique si elle est de la forme $f(x) = g(x)$ (resp. $f(x) \leqslant g(x)$), où $(f,g) \in \left[\Pi_n(\mathbb{B})\right]^2$.

On sait que tout système d'équations et/ou d'inéquation est réductible à la forme $k(x) = 0$ où $k \in \Pi_n(\mathbb{B})$. La résolution des équations algébriques du type $k(x) = 0$ sera faite par l'élégante méthode des éliminations successives développée par Rudeanu (cf. [R2]) d'après un travail de Boole lui même.

$(T,V,.)$ désignant un treillis distributif, $M_{n,p}(T)$, sera (pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$) l'ensemble des matrices d'ordre (n,p) sur T muni de la structure de treillis et du produit matriciel défini par

$$(A \otimes B)_{i,j} = \bigvee_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

où $A \in M_{n,p}(T)$; $B \in M_{p,q}(T)$; $(A \otimes B) \in M_{n,q}(T)$

On posera $M_{n,n}(T) = M_n(T)$. Pour $A \in M_n(T)$, on définit

$$\hat{A} = \bigvee_{k=1}^{n} A^k \qquad (O\text{-}4)$$

Dans le cas d'un treillis avec premier et dernier élément (0 et 1), on désignera par 0 et e les éléments universels de $M_{n,p}(T)$, sans spécifier le plus souvent l'ordre de ces matrices, pour ne pas alourdir les notations. On sait que

$$\left(\forall A \in M_n(T)\right) \qquad A^n \otimes e = A^{n+1} \otimes e \qquad (o\text{-}5)$$

.../...

Ce théorême démontré par Rutherford ([R5]) dans le cas booléen reste vrai dans le cas des treillis distributifs bornés. Il y sera fait référence dans la suite sous le nom de théorême de Rutherford.

Enfin une partie A d'un ensemble ordonné P sera dite mince si deux éléments quelconques distincts de A sont incomparables.

Pour référencer les propriétés et relations on a utilisé un système de deux numérotations parallèles : les parenthèses ( ) désignent les relations ou formules obtenues en cours de texte, les crochets [ ] désignent les propositions ou théorêmes établis ou rappelés. A chaque paragraphe de chaque chapitre est attachée une numérotation spécifique.

Chapitre 1

Propriétés Générales

I - A - Résiduation -

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{B})$; $X \in M_{n,p}(\mathbb{B})$; $B \in M_{m,p}(\mathbb{B})$.

On définit

$$\langle A,B \rangle = \overline{{}^{\dagger}A \otimes \bar{B}} \qquad (I - A1)$$

Il est bien connu (voir par exemple [B 8] ou [K 2]) que :

$$X \leqslant \langle A, A \otimes X \rangle \quad (\forall_A)\ (\forall_X) \qquad (I - A2)$$

et

$$A \otimes \langle A,B \rangle \leqslant B \quad (\forall_A)\ (\forall_B). \qquad (I - A3)$$

D'où il résulte que :

$$A \otimes X \leqslant B \Longleftrightarrow X \leqslant \langle A,B \rangle \quad \text{et donc} \qquad (I - A4)$$

$$X \otimes A \leqslant B \Longleftrightarrow X \leqslant {}^{\dagger}\langle {}^{\dagger}A, {}^{\dagger}B \rangle = \overline{\bar{B} \otimes {}^{\dagger}A}$$

et donc, en particulier

Proposition [I - A1] $(M_n(\mathbb{B}), \vee, \otimes)$ est un gerbier résidué.

La symétrie entre le produit matriciel et l'opérateur $\langle , \rangle$ de résiduation à gauche est illustrée par la relation

$$A \otimes B = \langle \overline{{}^{\dagger}A, \bar{B}} \rangle \qquad (I - A5)$$

qui implique

$$\langle A,X \rangle \geqslant B \Longleftrightarrow X \geqslant A \otimes B \qquad (I - A5')$$

.../...

Remarque :

$$^{\dagger}\langle A,B\rangle = \langle \bar{B},\bar{A}\rangle$$

La loi $\langle\ ,\ \rangle$ n'est pas associative, mais de l'associativité du produit matriciel et de (I - A5) on tire :

Proposition [I-A2] $\langle A, \langle B,C\rangle\rangle = \langle B \otimes A, C\rangle$

En effet :

$$\langle B \otimes A, C\rangle = \overline{^{T}(B \otimes A) \otimes \bar{C}} = \overline{^{\dagger}A \otimes (^{\dagger}B \otimes \bar{C})}$$
$$= \overline{^{\dagger}A \otimes \overline{\langle B,C\rangle}} = \langle A, \langle B,C\rangle\rangle$$

La proposition qui suit sera fort employée :

Proposition [I-A3] $\left\langle \bigvee_{i=1}^{n} A_i, \bigwedge_{j=1}^{p} B_j \right\rangle = \bigwedge_{i,j} \langle A_i, B_j\rangle$

Preuve

$$\left\langle \bigvee_{i=1}^{n} A_i, B \right\rangle = \overline{\bigvee_{i=1}^{n} {}^{\dagger}A_i \otimes \bar{B}} = \overline{\bigvee_{i=1}^{n} (^{\dagger}A_i \otimes \bar{B})}$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{(^{\dagger}A_i \otimes \bar{B})} = \bigwedge_{i=1}^{n} \langle A_i, B\rangle$$

De même $\left\langle A, \bigwedge_{j=1}^{p} B_j \right\rangle = \overline{^{\dagger}A \otimes \overline{\bigwedge_{j} B_j}} = \overline{^{\dagger}A \otimes \bigvee_{j} \bar{B}_j} = \overline{\bigvee_{j} {}^{\dagger}A \otimes \bar{B}_j}$

$$= \bigwedge_{j} \overline{^{\dagger}A \otimes \bar{B}_j}$$

Corollaire : L'application $(A,B) \longrightarrow \langle A,B\rangle$ est isotone en B et antitone en A.

.../...

Proposition [I-A4]

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} A_i , B \right\rangle \gg \bigvee_{i=1}^{n} \langle A_i , B \rangle \quad \text{et}$$

$$\left\langle A, \bigvee_{j=1}^{p} B_j \right\rangle \gg \prod_{j=1}^{p} \langle A, B_j \rangle$$

Proposition [I-A5]

L'équation

$$A \otimes X = B \quad (I\text{-}A6) \qquad \left(\text{resp. } \langle A,X \rangle = B \quad (I\text{-}A6')\right)$$

admet des solutions si et seulement si

$$A \otimes \langle A,B \rangle = B \quad (I\text{-}A7) \qquad \left(\text{resp. } \langle A, A \otimes B \rangle = B \ (I\text{-}A7')\right)$$

Toute solution est alors inférieure ou égale à $\langle A,B \rangle$ (resp. supérieureou égale à $A \otimes B$).

Preuve

(IA2) et (IA3) suffisent à prouver (I-A7). Si (I-A6') a une solution X, celle-ci est supérieureou égale à $A \otimes B$ d'après (I-A5'). De plus

$\langle A, X \rangle = B \iff {}^{\dagger}A \otimes \bar{X} = \bar{B}$ et pour que cette dernière équation ait une solution, il faut et il suffit que

$$ {}^{\dagger}A \otimes \langle {}^{\dagger}A, \bar{B} \rangle = \bar{B}$$

ou encore $$B = \overline{{}^{\dagger}A \otimes \langle {}^{\dagger}A, \bar{B} \rangle} = \overline{{}^{\dagger}A \otimes (\overline{A \otimes B})} = \langle A, A \otimes B \rangle$$

Lemme $\left(\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{B})\right) \left(\forall B \in M_{n,p}(\mathbb{B})\right)$

$$A \otimes \langle A, A \otimes B \rangle = A \otimes B \quad (I\text{-}A8) \quad \text{et}$$

$$\langle A, A \otimes \langle A,B \rangle \rangle = \langle A,B \rangle \quad (I\text{-}A8')$$

.../....

Preuve

$A \otimes X = A \otimes B$ est toujours compatible ce qui prouve (I-A8). La démonstration est identique pour (I-A8') à partir de

$$\langle A,X\rangle = \langle A,B\rangle$$

Cette propriété sera utilisée en [I-A7]

Proposition [I-A6] Soit A fixée dans $M_n(\mathbb{B})$. On définit

$$\varphi_A : M_n(\mathbb{B}) \longrightarrow M_n(\mathbb{B})$$

$$\psi_A : M_n(\mathbb{B}) \longrightarrow M_n(\mathbb{B})$$

par: $\varphi_A(X) = \langle A, A \odot X\rangle$ (I-A9)

$\psi_A(X) = A \otimes \langle A,X\rangle$ (I-A10)

Alors φ_A et ψ_A sont idempotentes et vérifient

$$\psi_A(X) \lessdot X \lessdot \varphi_A(X) \qquad \text{(I-A11)}$$

Preuve

$A \otimes \varphi_A(X) = A \otimes X$ d'après (I-A8)

et $\left(\varphi_A \circ \varphi_A\right)(X) = \langle A, A \otimes \varphi_A(X)\rangle = \langle A, A \otimes X\rangle = \varphi_A(X)$

de plus $\varphi_A(X) \gtrdot X$ d'après (I-A2)

de même $\langle A, \psi_A(X)\rangle = \langle A, A \otimes \langle A,X\rangle\rangle = \langle A,X\rangle$ et

$\left(\psi_A \circ \psi_A\right)(X) = A \otimes \langle A, \psi_A(X)\rangle = \psi_A(X)$. Par ailleurs

(I-A3) montre que $\psi_A(X) \lessdot X$.

.../...

Proposition [I-A7] Prenons p=n. Pour que l'application

$$M_n(\mathbb{B}) \longrightarrow M_n(\mathbb{B}) \qquad : \quad x \longrightarrow A \otimes x$$

soit bijective, il suffit qu'elle soit injective

Preuve Supposons que

$$A \otimes X = A \otimes Y \Longrightarrow X = Y, \text{ alors}$$

$$\langle {}^{\dagger}A, X\rangle = \langle {}^{\dagger}A, Y\rangle \Longrightarrow X = Y$$

et en particulier $\langle {}^{\dagger}A, X\rangle = \langle {}^{\dagger}A, I\rangle \Longrightarrow X = I$

Or, d'après (I-A8') :

$$\langle X, X \otimes \langle X, Y\rangle\rangle = \langle X, Y\rangle$$

donc, en prenant $X = {}^{\dagger}A$ et $Y = I$

$$\langle {}^{\dagger}A, {}^{\dagger}A \otimes \langle {}^{\dagger}A, I\rangle\rangle = \langle {}^{\dagger}A, I\rangle$$

donc $${}^{\dagger}A \otimes \langle {}^{\dagger}A, I\rangle = I \quad \text{ou encore}$$

$${}^{\dagger}\langle {}^{\dagger}A, I\rangle \otimes A = I$$

Ce qui prouve que A est inversible (cf |R6|) et donc $X \longrightarrow A \otimes X$ bijective.

.../...

I - B - Matrices Nilpotentes -

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux suites de matrices à éléments dans un treillis distributif borné. La plupart de ces propriétés ne sont pas en effet spécifiquement booléennes.

Soit $(T,\vee,.,0,1)$ un treillis distributif borné et $A \in M_n(T)$ $\left(a^k_{i,j}\right.$ désignera $\left.(A^k)_{i,j}\right)$

Proposition [I - B1] S'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [1,n]$ tels que

$$a^k_{i,i} \neq 0 \qquad (II - B1)$$

alors $A^n \neq 0$

Preuve La démonstration est immédiate si $k \geqslant n$. Supposons donc $1 \leqslant k \leqslant n-1$ alors

$$a^k_{i,i} = \bigvee_{(i_1,\ldots i_{k-1})} a_{ii_1}\, a_{i_1i_2} \ldots\ldots\, a_{i_{k-1},i} \neq 0$$

où $(i_1,\ldots i_{k-1}) \in [1,n]^{k-1}$ Donc

$$\exists (i_1,\ldots\ldots,i_{k-1}) : a_{ii_1}\, a_{i_1i_2}\, a_{i_{k-1},i} \neq 0$$

et ce dernier terme est l'une des conjonctions figurant dans la disjonction donnant $a^{kp}_{i,i}$ $(\forall p \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{donc} \quad a^{kp}_{i,i} \neq 0 \quad (\forall p \in \mathbb{N}^*) \Longrightarrow A^n \neq 0 \quad (c.q.f.d)$$

On utilisera maintenant le théorême de Rutherford (o-5)

$$A^{n+1} \otimes e = A^n \otimes e$$

On peut s'assurer que la démonstration de ce théorême faite par Rutherford dans le cas booléen n'utilise que la structure de treillis distributif de $\mathbb{B}$. On peuténoncerla propriété:

.../...

Théorême [II - B2]

Pour que $A \in M_n(T)$ soit nilpotente il faut et il suffit que $A^n = 0$.

Preuve

En effet si A est nilpotente et si $A^k = 0$ $(k \leqslant n)$, la propriété est triviale.

Si $k > n$, alors

$$A^k = 0 \Rightarrow A^k \otimes e = A^{k-1} \otimes e = 0 \Longleftrightarrow A^{k-1} = 0$$

et donc $A^n = 0$

Désignons maintenant par $\bar{I}$ la matrice de $M_n(T)$ définie par $(\bar{I})_{i,j} = \overline{\delta_{ij}}$ on a :

Proposition [II - B3]

Si $A^k \leqslant \bar{I}$ $(\forall k)$ $(k \in [1,n-1])$, alors

$$A^n \leqslant 1 \qquad \text{(II - B2)}$$

Preuve

$$(A^n)_{i,j} = \bigvee_{(i_1 \cdots i_{n-1}) \in J_n} a_{i i_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{n-1}, j}$$

où $J_n = [1,n]^{n-1}$ et $i \neq j$. Prenons $i = i_0$; $j = i_n$. Alors sur les $n + 1$ indices $(i_0, \ldots i_n)$ deux au moins sont confondus et

$$(\exists h)\ (\exists k) : h < k \qquad i_h = i_k$$

donc $\qquad 1 \leqslant k - h \leqslant n$

.../...

On ne peut avoir $k - h = n$, qui impliquerait $i_k = j$ et $i_h = i$. Donc $1 \leqslant k - h \leqslant n - 1$ et

$$a_{i i_1} \ldots a_{i_{n-1}, j} \leqslant a_{i h, i_{h+1}} \ldots a_{i_{k-1} i_h} \leqslant \left(A^{k-h}\right)_{i_h, i_h} = 0$$

Corollaire

Si $A^k \leqslant \bar{I} \quad (\forall k) \quad (k \in [1,n])$
alors A est nilpotente.

En effet $A^n \leqslant I$ et $A^n \leqslant \bar{I} \Longrightarrow A^n = 0$

Des propositions [II - B2] et [II - B3], on déduit

Théorème [II - B4] Une condition nécessaire est suffisante pour que A soit nilpotente est que

$$\boxed{\bigvee_{k=1}^{n} A^k \leqslant \bar{I}} \qquad (II - B3)$$

Cette dernière condition est en effet équivalente à

$$A^k \leqslant \bar{I} \qquad k \in [1,n]$$

Proposition [II - B5]

Si A vérifie

$$\bigvee_{1}^{n-1} A^k = \bar{I} \qquad \text{alors} \qquad A^n = I$$

Preuve

Le théorème [II - B3] montre que $A^n \leqslant I$. De plus

$$\bigvee_{2}^{n} A^k = A \otimes \bar{I} \Longrightarrow \bigvee_{1}^{n} A^k = A \vee A \otimes \bar{I} = A \otimes e$$

.../...

Ou encore

$$\bar{I}_v A^n = A \otimes e$$

$$A \otimes e \geqslant \bar{I}$$

$$A \otimes e \otimes e \geqslant \bar{I} \otimes e$$

$$A \otimes e \geqslant e \Longrightarrow A \otimes e = e$$

Donc $$A^n \ _v \bar{I} = e \Longleftrightarrow A^n \geqslant I$$

La "stabilité" des suites de produits matriciels peut encore être illustrée par le résultat suivant :

Proposition [II - B6]

Soit T un treillis distributif fini, j une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, $(A^{(p)})_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de matrices sur T telles que $A^{(p)} \in M_{jp, jp+1}(T)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$p \geqslant \lambda \Longrightarrow \left[\bigotimes_{k=1}^{\lambda} A^{(k)} \right] \otimes e = \left[\bigotimes_{k=1}^{p} A^{(k)} \right] \otimes e$$

(à gauche, $e \in M_{j\lambda+1, 1}(T)$, à droite $e \in M_{jp+1, 1}(T)$)

Preuve

Posons $$B^{(p)} = \bigotimes_{k=1}^{p} A^{(k)}$$

Alors $$\left(B^{(p+1)} \otimes e\right)_i = \bigvee_j \left(B^{(p+1)}\right)_{i,j}$$

$$= \bigvee_{(i_1, \ldots i_p, j)} a^{(1)}_{i i_1} a^{(2)}_{i_1 i_2} \ldots a^{(p)}_{i_{p-1}, i_p} a^{(p+1)}_{i_p, j} \quad \text{(II - B4)}$$

.../...

Pour toute conjonction de (II - B4), on a

$$a^{(1)}_{i i_1}\ a^{(2)}_{i_1 i_2} \cdots a^{(p)}_{i_{p-1}, i_p}\ a^{(p+1)}_{i_p, j} \leqslant a^{(1)}_{i i_1}\ a^{(2)}_{i_1 i_2} \cdots a^{(p)}_{i_{p-1}, i_p}$$

$$\leqslant \bigvee_{(k_1, \ldots, k_p)} a^{(1)}_{i k_1}\ a^{(2)}_{k_1 k_2} \cdots a^{(p)}_{k_{p-1}, k_p} = \left(B^{(p)} \otimes e\right)_i$$

Cette inégalité étant valable pour toute conjonction on a :

$$\left(B^{(p+1)} \otimes e\right)_i \leqslant \left(B^{(p)} \otimes e\right)_i$$

Si donc on pose

$$\lambda_p = B^{(p)} \otimes e \in M_{j_1, 1}(T) \qquad (\forall p)$$

la suite des λ_p est décroissante. Dans un treillis fini, elle est nécessairement stationnaire, ce qui assure le résultat.

Cette propriété appelle quelques remarques. Tout d'abord la démonstration reste valable sur les C.-Semi-anneaux (cf.[P1]). Elle généralise ensuite le théorême de Rutherford sur la suite des puissances d'une matrice booléenne (mais ici, avec la restriction, importante, il est vrai, du cas fini). Elle généralise directement par ailleurs une propriété établie en bivalent par Pullmann (à propos de Processus Markhoviens) à l'aide d'une démonstration ensembliste.

.../...

I - C - Pseudo-Module sur un treillis -

La notion de pseudo-module présentée ci-dessous s'introduit de façon naturelle dans l'étude des valeurs propres et des vecteurs propres. On ne s'attardera pas ici à développer les propriétés de cette structure (par ailleurs intéressante) et on ne retiendra que celles des propriétés utilisées dans la suite pour les treillis de Boole ou de Post.

Définition

Soit $(K,\vee,.\quad)$ un treillis. On dit que $(T,\vee,\times)$ est un K-pseudo-module (*) si

1) $(T,\vee)$ est un sup-demi-treillis.
2) On a défini une application

$$K \times T \longrightarrow T \qquad (p,X) \longrightarrow p \times X$$

qui vérifie

$$p \times (X_1 \vee X_2) = (p \times X_1) \vee (p \times X_2)$$

$$(p_1 . p_2) \times X = p_1 \times [p_2 . X]$$

$$(p_1 \vee p_2) \times X = p_1 \times X \vee p_2 \times X$$

Conséquences

1) $p_1 \leqslant p_2 \Longrightarrow p_1 \times X' \leqslant p_2 \times X \qquad (\forall X \in T)$
2) $X \leqslant Y \Longrightarrow p \times X \leqslant p \times Y \qquad (\forall p \in K)$

Un sous K-p-m sera une partie non vide T' de T telle que

$$\left(\forall (X,Y) \in T'^2\right)\left(\forall p \in K\right)$$

$$X \vee Y \in T' \qquad p \times X \in T'$$

Un sous K-p-m est un K-p-m (pour la restriction des lois). Toute intersection de sous K-p-m est un sous K-p-m, ce qui légitime la définition du sous K-p-m engendré par une partie A de T comme l'intersection de tous les sous K-p-m de T contenant A.

.../...

(*) K-p-m dans la suite.

Si A est l'ensemble des x_α pour $\alpha \in I$, le sous K-p-m engendré par A est l'ensemble des

$$\bigvee_{\alpha \in I} p_\alpha \, x_\alpha \quad \text{où} \quad p_\alpha \in K \quad \text{et où il n'y a}$$

qu'un nombre fini de p_α non nuls. On a effectivement ici une structure quasi-modulaire. Remarquons enfin que tout idéal d'un treillis distributif T (et en particulier T lui-même) peut être regardé comme un T - p.m. (Il en est de même de T^p). Ceci s'appliquera naturellement au cas où T est une algèbre de Boole.

Définition

Soit $A \in M_{m,n}(T)$ et $\lambda \in T$

$\lambda \times A \in M_{m,n}(T)$ sera définie par

$$[\lambda \times A]_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Alors $(M_{m,n}(T), V, X)$ est un T-p-m (d'ailleurs isomorphe à T^{mn})
On a ici, par ailleurs

$$A \otimes (\lambda \times B) = (\lambda \times A) \otimes B = \lambda \times (A \otimes B)$$

et $$^t(\lambda \times A) = \lambda \times (^tA.)$$

et, dans le cas booléen :

$$\overline{\lambda \times A} = \bar{\lambda} . e \vee \bar{A}$$

On notera dans la suite (lorsque ce sera sans ambiguité) λA au lieu de $\lambda \times A$.

.../...

I - D - Théorême de Lagrange et pseudo-modules

Soient $f \in \pi_n(\mathbb{B})$; $(t,z) \in (\mathbb{B}^n)^2$; $\lambda \in \mathbb{B}$ Alors

Proposition [I - D1]

$$f(\lambda t_v \bar{\lambda} z) = \lambda f(t) \, v \, \bar{\lambda} f(z)$$

Preuve

$$f(\lambda t_v \bar{\lambda} z) = \bigvee_{\alpha \in \langle 2 \rangle^n} (\lambda t_v \bar{\lambda} z)^{\alpha} \, f(\alpha)$$

or $(\lambda t_{iv} \bar{\lambda} z_i)^{\alpha_i} = \lambda t_i^{\alpha_i} \, v \, \bar{\lambda} z_i^{\alpha_i}$ et donc

$$(\lambda t_v \bar{\lambda} z)^{\alpha} = \lambda t^{\alpha} \, {}_v \, \bar{\lambda} \, z^{\alpha} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Corollaire

(Théorême de Lagrange dans $\mathbb{B}^n$) [I - D2]

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \, v \, \bar{\lambda} f(o) \qquad (\lambda \in \mathbb{B};\ x \in \mathbb{B}^n)$$

Conséquence

Soit $f \in \pi_n(\mathbb{B})$; $(u,p) \in (\mathbb{B}^n)^2$. Définissons φ_u

$$\varphi_u(p) = f(p).\, u \, v \, \bar{f}(p).p \qquad (I - D1)$$

Alors $(f \circ \varphi_u)(p) = f\,[f(p).\, u_v \, \bar{f}(p).p]$

$= f(p)\, f(u) \, v \, \bar{f}(p)\, f(p)$ donc

$$f[\varphi_u(p)] = f(p).f(u) \qquad (\forall p)$$

.../...

Si donc u est une solution particulière de f=o alors $\varphi_u(p)$ est solution de cette même équation $(\forall p)$.

Réciproquement, si x est solution de f=o, alors

$$x = \varphi_u(x) \qquad (\forall u)$$

Pour u fixé, solution, $\varphi_u(\mathbb{B}^n)$ est donc l'ensemble des solutions de f = o

.../...

I - E - Equations dans les pseudo-modules matriciels -

On va donner ici certaines règles de calcul (notamment relativement à la résiduation) et quelques résolutions d'équation qui généralisent aux pseudo-modules booléens les résultats donnés au paragraphe (O) pour les Algèbres de Boole.

Proposition I - E1

$$\langle A, \lambda B \rangle = \lambda \langle A,B \rangle \vee \langle A,0 \rangle \qquad (I - E1)$$

$$\langle \lambda A, B \rangle = \bar{\lambda} \cdot e \vee \langle A,B \rangle \qquad (I - E2)$$

Les démonstrations sont immédiates.

Conséquence

$$\left\langle \bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i A_i , \widetilde{\prod_{j=1}^{p}} \mu_j B_j \right\rangle \qquad (I - E3)$$

$$= \widetilde{\prod_{i=1}^{n}} \left[\bar{\lambda}_i . e \vee \langle A_i , 0 \rangle \vee \widetilde{\prod_{j=1}^{p}} \mu_j \langle A_i , B_j \rangle \right]$$

on utilise [I - A3]

Le résultat qui suit et qui généralise les résultats sur une algèbre $\mathbb{B}$ est fondamental dans la théorie des valeurs propres.

Théorême [I - E2]

L'équation à une inconnue λ:

$$\lambda x \vee \bar{\lambda} y = o \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{B} \quad \left(x \in M_{n,1}(\mathbb{B})\right) \left(y \in M_{n,1}(\mathbb{B})\right)$$

admet des solutions si et seulement si

$$({}^{t}e \otimes x) \cdot ({}^{t}e \otimes y) = o \qquad (I - E4)$$

L'ensemble des solutions est alors l'intervalle de $\mathbb{B}$:

$$J = \left[{}^{t}e \otimes y , {}^{t}\overline{e \otimes x} \right] \qquad (I - E5)$$

.../...

Preuve

$$\lambda x \ {}_{v} \ \bar{\lambda} y = 0 \Longleftrightarrow \lambda x_i \ {}_{v} \ \bar{\lambda} y_i = 0 \qquad (\forall i \in [1,n])$$

et il est nécessaire que $x_i \ y_i = 0$ pour qu'il y ait des solutions.

Alors $$y_i \ll \lambda \ll \overline{x}_i \qquad i \in [1,n]$$

La condition nécessaire et suffisante de compatibilité est que l'intersection des n intervalles précédents ne soit pas vide. Comme ces conditions équivalent à

$$\bigvee_i y_i \ll \lambda \ll \prod_i \overline{x}_i$$

il est nécessaire et suffisant que

$$\bigvee_i y_i \ll \prod_i \overline{x}_i$$

Un calcul immédiat donne le résultat annoncé.

Remarque :

On peut "paramétrer" l'intervalle solution $\mathcal{J}$ suivant :

$$\lambda \in \mathcal{J} \Longleftrightarrow (\exists p) \quad (p \in \mathbb{B}) : \quad \lambda = p. \overline{{}^{t}e \otimes x} \vee \overline{p}. ({}^{t}e \otimes y)$$

Polynômes booléens généralisés

On peut élargir aux pseudo-modules du types $\mathbb{B}^n$ la notion de polynôme booléen.

.../...

Par définition une application f de $\mathbb{B}^p$ dans $\mathbb{B}^n$ sera un polynôme généralisé si f s'écrit

$$f(\lambda) = \bigvee_{\alpha \in \langle 2 \rangle^p} \lambda^{\alpha} x_{\alpha} \qquad (\lambda \in \mathbb{B}^p) \ (x_{\alpha} \in \mathbb{B}^n) \quad (I\text{-}E7)$$

Alors, prenant $\lambda = \beta$, élément de $\langle 2 \rangle^p$, sous algèbre de $\mathbb{B}^p$, il vient d'après (o - 1)

$$x_{\beta} = f(\beta)$$

La théorie des équations algébriques peut alors se développer comme dans [R2]. Le théorême [I - E2] a étudié la résolution des équations à une inconnue. Donnons encore :

Proposition [I - E3]

Pour que $f(\lambda) = 0$

soit compatible, il faut et il suffit que

$$\bigwedge_{\alpha \in \langle 2 \rangle^p} \left[{}^{\dagger}e \otimes f(\alpha) \right] = 0 \qquad (I\text{-}E8)$$

Preuve

Démontrons la propriété par récurrence par p. (le théorême [I - E2] est obtenu pour p = 1).

Soit donc $f(\lambda) = \bigvee_{\alpha \in \langle 2 \rangle^p} \lambda^{\alpha} f(\alpha)$ et distinguons suivant les

valeurs de α . Posant $\tilde{\lambda} = (\lambda_2, \ldots, \lambda_p)$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_p)$

il vient

$$f(\lambda) = \lambda_1 \bigvee_{\tilde{\alpha} \in \langle 2 \rangle^{p-1}} \tilde{\lambda}^{\tilde{\alpha}} . f(1, \alpha_2, \ldots \alpha_p) \vee \bar{\lambda}_1 \bigvee_{\tilde{\alpha} \in \langle 2 \rangle^{p-1}} \tilde{\lambda}^{\tilde{\alpha}} . f(o, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$$

et, comme condition de compatibilité, d'après le théorême [I-E2] :

.../...

$$\left[\bigvee_{\tilde{\alpha}} \tilde{\lambda}^{\tilde{\alpha}} \left({}^{\dagger}e \otimes f\ (1,\alpha_2,\ldots\ \alpha_p)\right)\right] \cdot \left[\bigvee_{\tilde{\alpha}} \tilde{\lambda}^{\tilde{\alpha}} \left({}^{\dagger}e \otimes f\ (0,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)\right)\right] = 0$$

or $$\left[\lambda^{\tilde{\alpha}}\right]\left[\tilde{\lambda}^{\tilde{\beta}}\right] = 0 \qquad (\alpha \neq \beta)$$

et donc $$\bigvee_{\tilde{\alpha}} \tilde{\lambda}^{\tilde{\alpha}} \left[{}^{\dagger}e \otimes f\ (1,\alpha_2,\ldots\ \alpha_p)\right]\ \left[{}^{\dagger}e \otimes f\ (0,\alpha_2,\ldots\alpha_p)\right] = 0$$

équation du type (I - E8) dans $\mathbb{B}^{p-1}$, à la-quelle on applique l'hypothèse de récurrence. On trouve

$$\widetilde{\prod_{\tilde{\alpha}\ \varepsilon\langle 2\rangle^{p-1}}} \left[{}^{\dagger}e \otimes f\ (1,\alpha_2,\ldots\ \alpha_p)\right]\ \left[{}^{\dagger}e \otimes f\ (o,\alpha_2,\ldots\alpha_p)\right] = 0$$

Soit $$\widetilde{\prod_{\alpha\ \varepsilon\langle 2\rangle^{p}}} \left[{}^{\dagger}e \otimes f\ (\alpha)\right] = 0 \qquad \text{(c.q.f.d)}$$

Ces propriétés données pour plus de commodité dans $\mathbb{B}^n$ et $\mathbb{B}^p$ seront naturellement appliquées aux p.m. matriciels. On pourrait développer aussi une méthode de résolution algorithmique effective ce que nous proposons de faire dans un autre travail. (Le seul théorême [I-E2] sera suffisant dans la suite).

.../...

I - F - Formes disjonctives et résiduation -

$M_{n,1}(\mathbb{B})$ et $\mathbb{B}^n$ sont isomorphes (comme algèbres de Boole). Les théorêmes qui suivent seront donnés dans $M_{n,1}(\mathbb{B})$ et pourront être traduits par isomorphisme. On posera, pour plus de commodité $M_{n,1}\langle 2\rangle = \mu_n$.

Théorême [I - F1] (Théorême de Lagrange matriciel)

$$\left(\forall z \in M_{n,1}(\mathbb{B})\right) \qquad z = \bigvee_{\alpha} z^{\alpha} \cdot \alpha \quad (\alpha \in \mu_n) \qquad (I - F1)$$

Preuve Formons :

$$g(z) = \bigvee_{\alpha} z^{\alpha} \cdot \alpha \qquad (\alpha \in \mu_n)$$

Alors $\left[g(z)\right]_j = \bigvee_{\alpha} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \cdot \alpha_j$

En distinguant suivant les valeurs de α_j, il vient

$$\left[g(z)\right]_j = z_j \left[\bigvee_{\alpha^* \in \mu_{n-1}} z_1^{\alpha_1} \cdots z_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \cdot z_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots z_n^{\alpha_n}\right]$$

où $^{\dagger}(\alpha^*) = \left[\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \alpha_n\right]$. Le crochet est égal à 1 [C'est l'expression normale disjonctive de l'application $\mathbb{1}$]:

$\mathbb{1}$: $\mathbb{B}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{B}$, définie par :

$$\mathbb{1}(z_1 \cdots z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n) = 1 \qquad (\forall z_1, \ldots, z_n)$$

Corollaire

$$\bigvee_{\alpha \in \langle 2\rangle^n} z^{\alpha} = 1 \; ; \qquad z^{\alpha} \cdot z^{\beta} = 0 \qquad \alpha \neq \beta \qquad (I - F2)$$

Lemme $$z^{\alpha} = \langle \alpha, z\rangle \cdot \langle z, \alpha\rangle \qquad (I - F3)$$

.../...

$$\langle z, a \rangle = {}^t\overline{z \otimes \bar{\alpha}} = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i \vee \bar{z}_i)$$

Donc $\langle \alpha, z \rangle \cdot \langle z, a \rangle = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i \vee \bar{z}_i) \cdot (\bar{\alpha}_i \vee z_i)$

or $(\alpha_i \vee \bar{z}_i) \cdot (\bar{\alpha}_i \vee z_i) = \bar{\alpha}_i \oplus z_i = z_i^{\alpha_i}$

On peut donc écrire le théorême de Lagrange sous forme résiduée

$$\left(\forall z \in M_{n,1}(\mathbb{B})\right) \quad z = \bigvee_{\alpha \in \mu_n} \langle \alpha, z \rangle \cdot \langle z, a \rangle \cdot \alpha \qquad (I - F4)$$

Corollaire

$$\bigvee_{\alpha} \langle \alpha, z \rangle \cdot \langle z, \alpha \rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad (I - F5)$$

$$\langle \alpha, z \rangle \cdot \langle z, \alpha \rangle \cdot \langle \beta, z \rangle \cdot \langle z, \beta \rangle = 0$$

$(\alpha \neq \beta)$

Définition

Désignons par e_i l'élément de μ_n défini par

$$(e_i)_j = \delta_{ij}$$

et soit $\Omega = \{e_i\}_{i=1}^{n}$

Tout élément $x \in M_{n,1}$ $(\mathbb{B})$ s'écrit de façon unique

$$x = \bigvee_{i=1}^{n} x_i \, e_i = \bigvee_{\alpha \in \Omega} x_\alpha \cdot \alpha \qquad (I - F6)$$

.../...

Cette décomposition sera appelée canonique. Il y a donc deux types de décomposition, l'une disjonctive (composantes notées x^{α}) de type "orthonormal" sur μ_n, l'autre canonique (composantes x_α) sur Ω. Le théorême ci-dessous exprime les composantes canoniques sous forme résiduée.

Proposition I - F2

$$\left(\forall z \in M_{n,1}(\mathbb{B})\right) \qquad z = \bigvee_{\alpha \in \Omega} \langle \alpha, z \rangle \cdot \alpha$$

Preuve

$$\langle e_i, z \rangle = \prod_{j=1}^{n} \left((\overline{e_i})_j \vee z_j \right) = z_i$$

Conséquence

$$t_e \otimes z = \bigvee_{\alpha \in \Omega} \langle \alpha, z \rangle = \bigvee_{\alpha \in (\mu_n)^*} \langle \alpha, z \rangle \qquad (\mu_n^* = \mu_n - \{o\}) \quad (I\text{-}F7)$$

La première égalité est immédiate. Pour démontrer la seconde, on observe que si

$$\alpha \in \mu_n^* \qquad \exists\, e_i \in \Omega : \alpha \gg e_i \qquad \text{et}$$

$$\langle \alpha, z \rangle \ll \langle e_i, z \rangle \qquad \left(\text{cf. } [I - A3]\right)$$

La disjonction suivant $(\mu_n)^*$ peut donc être effectuée selon Ω.

.../...

I - G - Noyau et image des homomorphismes de pseudo-modules -

Si T et T' sont deux K - p.m, une application φ de $(T')^T$ sera un homomorphisme de T sur T' si

$$\varphi(xvy) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \quad ; \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \qquad (\lambda \in K).$$

L'ensemble $MH(T,T')$ des homomorphismes de pseudo-modules de T sur T' peut être (trivialement) constitué en pseudo-module .

Noyau et image d'un homomorphisme de pseudo-modules se définissent évidemment comme

$$N(\varphi) = \left\{ x \; ; \; x \in T \;\middle|\; \varphi(x) = 0_{T'} \right\}$$

$$\varphi(T) = \left\{ x \; ; \; x \in T' \;\middle|\; \exists\, y \in T \; ; \; \varphi(x) = y \right\}$$

La définition du noyau exige l'existence d'un élément minimum dans T'.

Proposition [I - G1]

L'ensemble des homomorphismes (de pseudo-modules) de $\mathbb{B}^p$ dans $\mathbb{B}^n$ est isomorphe à $M_{n,p}(\mathbb{B})$

Preuve

Soit $\varphi \in MH(\mathbb{B}^p, \mathbb{B}^n)$; alors soient

$$x = \bigvee_{i=1}^{p} x_i \, e_i \qquad \text{et} \qquad y = \bigvee_{j=1}^{n} y_j \, f_j$$

les décompositions canoniques de $x \in \mathbb{B}^p$ et $y \in \mathbb{B}^n$

.../...

$$y = \varphi(x) = \bigvee_{i=1}^{p} x_i \, \varphi(e_i) = \bigvee_{i=1}^{p} x_i \bigvee_{j=1}^{n} a_{ji} \, f_j$$

Soit $y_j = \bigvee_{i=1}^{p} a_{ji} \, x_i$ et $A = A(\varphi)$ la matrice

$[A = (a_{ij})]$ de $M_{n,p}(\mathbb{B})$ ainsi définie. Il est immédiat que l'application (de $M\,H(\mathbb{B}^p, \mathbb{B}^n)$ dans $M_{n,p}(\mathbb{B})$) est un isomorphisme de pseudo-modules. De plus, si

$$\varphi \in M\,H(\mathbb{B}^p, \mathbb{B}^n) \qquad \psi \in M\,H(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^q) \text{ alors}$$

$$A(\psi \circ \varphi) = A(\psi) \otimes A(\varphi)$$

Nous n'avons pas cru utile de reproduire des démonstrations bien connues dans le cas des modules. Remarquons seulement que la structure de pseudo-module a permis de caractériser complètement les propriétés des matrices comme associées à des applications (la structure d'Algèbre de Boole de $M_{n,p}(\mathbb{B})$ étant, dans ce cas, inadéquate). Les deux propriétés qui suivent sont également immédiates :

Proposition [I - G2]

Le noyau d'un homomorphisme $\varphi \in M\,H(\mathbb{B}^p, \mathbb{B}^n)$ associé à une matrice A, est l'intervalle :

$$[0, \langle A, 0 \rangle]$$

Proposition [I - G3]

L'image de φ est le sous $\mathbb{B}$ - p.m engendré par

$$\{\varphi(e_i)\} \qquad i \in [1, n]$$

.../...

Les propositions qui suivent permettent de caractériser l'ensemble des vecteurs de l'image par leurs composantes disjonctives.

Proposition [I - G4]

Pour que $y \in \varphi(\mathbb{B}^p)$, il est nécessaire et suffisant que chacune de ses composantes disjonctives appartienne à $\varphi(\mathbb{B}^p)$

Preuve

Soit $$y = \bigvee_{\omega \in \langle 2 \rangle^p} y^{\omega} \cdot \omega$$

Alors

$$y^{\omega} \cdot y = y^{\omega} \cdot \omega$$

Si donc il existe x tel que $\varphi(x) = y$ alors

$$\varphi(y^{\omega} \cdot x) = y^{\omega} \cdot y = y^{\omega} \cdot \omega$$

et $y^{\omega} \cdot \omega \in \varphi(\mathbb{B}^p)$. La réciproque est immédiate d'après la structure de pseudo-module de $\mathbb{B}^p$.

Cette propriété nous conduit à nous intéresser aux éléments de l'image de la forme $\rho \cdot \omega$

Nous dirons que $x \in M_{p,1}(\mathbb{B})$ est primitif (cf. [R5]), s'il existe $\rho \in \mathbb{B}$ et $\omega \in M_{p,1}\langle 2 \rangle$ tel que

$$x = \rho \cdot \omega$$

.../...

Théorême [I - G5]

Si l'on pose

$$\rho^*(\omega) = \langle \omega \quad , A \otimes \langle A, \omega \rangle \rangle \qquad (I - G1)$$

L'image de l'endomorphisme associé à la matrice A est le sous $\mathbb{B}$ - p.m engendré par

$$\left\{ \rho^*(\omega) , \omega \right\} \qquad \omega \in M_{p,1}\langle 2 \rangle \qquad (I - G2)$$

Preuve

D'après la proposition [I - G4], pour qu'un vecteur y appartienne à l'image, il faut et il suffit que chacune de ses composantes disjonctives (qui est un élément primitif) appartienne elle-même à cette image. Il faut donc connaître l'ensemble des $\rho \in \mathbb{B}$ tels qu'il existe $x \in M_{p,1}(B)$ avec :

$$A \otimes x = \rho . \omega \quad \text{où } \omega \in M_{p,1}\langle 2 \rangle$$

Ceci équivaut, d'après [I - A5] à

$$A \otimes \langle A, \rho\omega \rangle = \rho\omega$$

D'après [I - E1], on a :

$$A \otimes \left[\langle A, \omega \rangle \vee \langle A, 0 \rangle \right] = \rho\omega$$

Soit $$\rho\left[A \otimes \langle A, \omega \rangle \right] = \rho\omega$$

or, d'après (I - A3) :

$$A \otimes \langle A, \omega \rangle \lessdot \omega$$

reste donc

$$\rho . \omega \lessdot \rho \left[A \otimes \langle A, \omega \rangle \right] = \rho . x_\omega$$

ou encore $$\rho . \omega . \overline{x_\omega} = 0$$

Donc $$\rho \lessdot \overline{{}^t e \otimes \omega . x_\omega} = \overline{{}^t \omega \otimes x_\omega} = \langle \omega , x_\omega \rangle = \rho^*(\omega)$$

.../...

I - H - Pseudo-Solutions des équations booléennes -

Soit $\varphi : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}'$. L'équation $\varphi = 0$ sera dite pseudo compatible si $\varphi(\mathbb{B})$ contient un élément minimum m. Tout $x \in \mathbb{B}$ tel que $\varphi(x) = m$ sera appelé pseudo-solution de $\varphi = 0$. Il est clair que toute solution, si elle existe, est pseudo-solution, mais les exemples qui vont suivre montrent qu'on pourra étendre des procédés de résolution à une classe plus large d'équations.

Proposition [I - H1]

$(\forall x)\ (\forall y) \in \mathbb{B}$ l'équation algébrique à une inconnue la plus générale :

$$\lambda x \vee \bar{\lambda} y = 0 \text{ est pseudo-compatible}$$

Preuve

$xy\ \overline{(\lambda x \vee \bar{\lambda} y)} = 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{B})$ et

$xy \leqslant \lambda x \vee \bar{\lambda} y \quad (\forall \lambda)$. De plus l'équation

$\lambda x \vee \bar{\lambda} y = xy$ admet toujours des solutions en λ

Elle s'écrit en effet

$$\lambda x \bar{y} \vee \bar{\lambda} \bar{x} y = 0$$

et donc fournit $\bar{x}\, y \leqslant \lambda \leqslant \bar{x} \vee y$ pour intervalle de pseudo-solutions.

.../...

Proposition [I - H2] (Cas des pseudo-modules)

Si x et y appartiennent à $M_{n,1}(\mathbb{B})$ et λ à $\mathbb{B}$, l'équation:

$$\lambda x \underset{v}{} \bar{\lambda} y = 0$$

est pseudo-compatible si et seulement si

$$\overline{\langle y,x\rangle} \cdot \langle \overline{x,y} \rangle = 0 \qquad (I - H1)$$

L'ensemble des pseudo-solutions est alors un intervalle de $\mathbb{B}$.

Preuve

Si λ est une pseudo solution, alors

$$\lambda x \underset{v}{} \bar{\lambda} y \lessdot \mu x \underset{v}{} \bar{\mu} y \qquad (\forall \mu \in B)$$

$$\lambda \bar{\mu} x\bar{y} \underset{v}{} \bar{\lambda} \mu \bar{x} y = 0 \qquad (\forall \mu \in B)$$

Ceci équivaut à

$$\lambda x \bar{y} = \bar{\lambda} \bar{x} y = 0 \quad \text{ou}$$

$$^{\dagger}e \otimes \bar{x} y \lessdot \lambda \lessdot \overline{^{\dagger}e \otimes x \bar{y}}$$

à condition que $(^{\dagger}e \otimes \bar{x}\, y)(^{\dagger}e \otimes x \bar{y}) = 0$ (cf. [I - H1]).

En remarquant que

$^{\dagger}e \otimes \bar{x}\, y = {}^{\dagger}y \otimes \bar{x} = \overline{\langle y,x\rangle}$, on a le résultat annoncé.

Proposition [I - H3]

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{B})$, $X \in M_{n,p}(\mathbb{B})$; $B \in M_{m,p}(\mathbb{B})$.

L'équation matricielle

$(A \otimes X) \oplus B = 0$ (équivalente à $A \otimes X = B$)

.../...

admet des pseudo-solutions si et seulement si

$$(A \otimes e) \cdot B \lessdot A \otimes \langle A,B \rangle \qquad (I - H2)$$

Preuve

$$A \otimes X = B \iff (A \otimes X)\ \overline{B} \vee \overline{(A \otimes X)} \cdot B = 0$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une pseudo-solution X_o est que

$$(A \otimes X_o)\ \overline{B} \vee \overline{(A \otimes X_o)}\ B \lessdot (A \otimes X)\ \overline{B} \vee \overline{(A \otimes X)} \cdot B \quad (\forall X)$$

On obtient

$$(A \otimes X_o)\ \overline{(A \otimes X)}\ \overline{B} \vee (A \otimes X)\ \overline{A \otimes X_o} \cdot B = 0 \qquad (\forall X)$$

et d'abord, en prenant $X = 0$

$$(A \otimes X_o) \cdot \overline{B} = 0$$

Reste $A \otimes X_o \gtrdot (A \otimes X) \cdot B \qquad (\forall X)$

La double inégalité

$(A \otimes X) \cdot B \lessdot A \otimes X_o \lessdot B$ $(\forall X)$ est nécessaire et suffisante. Elle est équivalente à

$$(A \otimes e)\ B \lessdot A \otimes X_o \lessdot B$$

Pour qu'il existe une solution en X_o, il faut et il suffit (cf. (I - A4)) que

$$(A \otimes e) \cdot B \lessdot A \otimes \langle A,B \rangle$$

.../...

(Rappelons que le cas où il existe des solutions à l'équation matricielle est celui où

$$B \ll A \otimes \langle A, B \rangle$$

II - Matrices particulières -

Les familles de matrices particulières qui vont être étudiées ci-dessous apparaissent de façon constante dans l'étude des matrices booléennes. C'est en "dédoublant" les conditions de Wedderbrun sur l'inversibilité d'une matrices qu'on les a obtenues en élargissant d'ailleurs l'étude aux matrices rectangles. Certaines avaient été déjà introduites (cf.[B9] pour les matrices distributives).

Les matrices unitaires apparaissent comme le contrepoint naturel des matrices orthogonales : on les obtient en "croisant" les conditions de Wedderbrun. Leur remarquable propriété est par ailleurs de définir des homomorphismes d'Algèbres, ce qui permet par exemple d'identifier tous les homomorphismes d'Algèbres finies.

.../...

II - A - Matrices pseudo-orthogonales -

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{B})$. On dit que A est pseudo-orthogonale à gauche (p.o.g.) si

$$(\forall q \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall X \in M_{p,q}(\mathbb{B}))$$

$$A \otimes X = 0 \Longrightarrow X = 0 \qquad (II - A1)$$

On dira de même que A est pseudo-orthogonale à droite (p.o.d) si

$$(\forall q \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall X \in M_{q,n}(\mathbb{B}))$$

$$X \otimes A = 0 \Longrightarrow X = 0 \qquad (II - A2)$$

Soient $G_{n,p}(\mathbb{B})$ (resp. $D_{n,p}(\mathbb{B})$) l'ensemble des matrices p.o.g (resp. p.o.d.) de $M_{n,p}(\mathbb{B})$.

Comme $A \otimes X = 0 \iff {}^tX \otimes {}^tA = 0$, on a

$$A \in G_{n,p}(\mathbb{B}) \iff {}^tA \in D_{p,n}(\mathbb{B}).$$

Proposition [II - A1]

A est pseudo-orthogonale à gauche si et seulement si

$${}^tA \otimes A \gg I \qquad (II - A3)$$

(I, matrice unité de $M_p(\mathbb{B})$)

.../...

Preuve

$$A \otimes X = 0 \Longleftrightarrow X \leqslant \langle A, 0 \rangle$$

et si A est p.o.g.) alors, prenant q = 1, on a

$$^{\dagger}A \otimes e = e \qquad \text{(II - A4)}$$

Donc $$(^{\dagger}A \otimes e)_i = \bigvee_{k=1}^{n} a_{ki} = 1 \qquad \text{(II - A5)}$$

Mais

$$(^{\dagger}A \otimes A)_{i,i} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{ki}$$

Réciproquement si

$$^{\dagger}A \otimes A \geqslant I$$

Alors on a pour l'équation

$$A \otimes X = 0$$

$$0 = {}^{\dagger}A \otimes A \otimes X \geqslant X \Longrightarrow X = 0$$

Remarques

1) (II - A4) et (II - A5) sont également caractéristiques

2) $A \in D_{n,p}(\mathbb{B}) \Longleftrightarrow A \otimes {}^{\dagger}A \geqslant I$

3) On voit qu'on aurait pu, dans la définition (II - A1), remplacer $(\forall q \in \mathbb{N}^*)$ par $(\exists q \in \mathbb{N}^*)$.

4) On pose $G_n(\mathbb{B}) = G_{n,n}(\mathbb{B})$; $D_n(\mathbb{B}) = D_{n,n}(\mathbb{B})$.

.../...

Proposition [II - A2]

$(G_n(\mathbb{B}), V, 0)$ est un sous-gerbier de $M_n(\mathbb{B})$.

Preuve

En effet $(G_n(\mathbb{B}), V)$ un sous V - demi treillis puisque si A et B appartiennent à $G_n(\mathbb{B})$ alors

$$(A \vee B) \otimes X = 0 \Longrightarrow A \otimes X = B \otimes X = 0 \Rightarrow X = 0$$

et $A \vee B \in G_n(\mathbb{B})$.

On a ainsi (II - A5) :

$$\left[\forall A \in G_n(\mathbb{B})\right] \left[\forall U \in M_n(\mathbb{B})\right] \quad U \rangle A \Longrightarrow U \in G_n(\mathbb{B})$$

De plus, $(G_n(\mathbb{B}), \otimes)$ est un sous demi groupe multiplicatif

En effet $$(A \otimes B) \otimes X = 0 \Longrightarrow B \otimes X = 0 \Longrightarrow X = 0$$

On a même :

Proposition : [II - A3]

$$A \otimes B \in G_n(\mathbb{B}) \Longrightarrow B \in G_n(\mathbb{B}).$$

Preuve

En effet, si X est une solution de $B \otimes X = 0$, alors $A \otimes (B \otimes X) = 0$, qui implique $X = 0$ et B est p.o.g.

.../...

Proposition [II - A4]

Une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\overline{A \otimes X} \leqslant A \otimes \overline{X} \qquad (\forall q \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall X \in M_{p,q}(\mathbb{B}))$$

est que $A \in M_{n,p}(\mathbb{B})$ soit pseudo-orthogonale à droite.

Preuve

Supposons d'abord $A \in D_{n,p}(\mathbb{B})$

et $X \in M_{p,q}(\mathbb{B})$

Alors

$$(\overline{A \otimes X})_{i,j} = \prod_{k=1}^{p} (\overline{a_{ik}} \vee \overline{x_{kj}})$$

et

$$(A \otimes \overline{X})_{i,j} = \bigvee_{k=1}^{p} a_{ik}\, \overline{x_{kj}}$$

Donc $(\overline{A \otimes X})_{i,j}\ (\overline{A \otimes \overline{X}})_{i,j} = \prod_{k=1}^{p} (\overline{a_{ik}} \vee \overline{x_{kj}})(\overline{a_{ik}} \vee x_{kj})$

$$= \overline{\prod_{k=1}^{p} a_{ik}} = \bigvee_{k=1}^{p} a_{ik} = 0$$

Réciproquement si

$$\overline{A \otimes X} \leqslant A \otimes \overline{X} \qquad (\forall X \in M_{p,q}(\mathbb{B}))\ (\forall q \in \mathbb{N}^*)$$

Alors, prenons $q = 1$ et $X = e$:

$$\overline{A \otimes e} = 0 \quad \text{ou} \quad A \otimes e = e$$

qui est bien la condition annoncée (cf. II - A4)

.../...

II - B - Matrices distributives -

$A \in M_{n,p}(\mathbb{B})$ sera dite distributive à gauche (*) (d.a.g) si

$$(\forall q \in \mathbb{N}^*)\left((\forall X)\ (\forall Y) \in M_{p,q}(\mathbb{B})\right)$$

$$A \otimes (X . Y) = (A \otimes X) . (A \otimes Y) \qquad (II - B1)$$

On dira de même que $A \in M_{n,p}(\mathbb{B})$ est distributive à droite (d.a.d.) si

$$(\forall q \in \mathbb{N}^*)\left((\forall X)\ (\forall Y) \in M_{q,n}(\mathbb{B})\right)$$

$$(X . Y) \otimes A = (X \otimes A) . (Y \otimes A) \qquad (II - B2)$$

Une matrice distributive à droite et à gauche sera dite distributive. Soient $\gamma_{n,p}(\mathbb{B})$ (resp. $\delta_{n,p}(\mathbb{B})$) l'ensemble des matrices d.a.g. (resp. d.a.d.) sur $M_{n,p}(\mathbb{B})$.

De

$${}^t[A \otimes (X . Y)] = ({}^tX . {}^tY) \otimes {}^tA, \text{ on tire}$$

$$A \in \gamma_{n,p}(\mathbb{B}) \Longleftrightarrow {}^tA \in \delta_{p,n}(\mathbb{B})$$

Théorême [II - B1]

A est distributive à gauche si et seulement si

$${}^tA \otimes A \leqslant I \qquad (II - B3)$$

(*) cf. [B9] qui définit les matrices Λ - distributives dans le cas de matrices carrées seulement.

..../....

Preuve :

Si A vérifie (II - B1), alors prenons q = 1 et pour matrices particulières la famille Ω^j ($j \in [1,n]$)

$$\Omega^j \in M_{p,1}(\mathbb{B}) \qquad (\Omega^j)_i = \delta_i^j$$

$$A \otimes \Omega^j \,.\, \overline{\Omega}^j = 0 = (A \otimes \Omega^j) \,.\, (A \otimes \overline{\Omega}^j)$$

et donc $(A \otimes \Omega^j)_i \, (A \otimes \overline{\Omega}^j)_i = 0$

$$= \bigvee_{k,\ell} a_{ik} \, a_{i\ell} \, \delta_k^j \, \overline{\delta_\ell^j} = \bigvee_{l} a_{ij} \, a_{i\ell} \, \overline{\delta_\ell^j} = \bigvee_{\ell \neq j} a_{ij} \, a_{i\ell} = 0$$

et cette dernière condition est équivalente à (II - B3).

Réciproquement, si (II - B3) vaut, alors :

$$(\forall q \in \mathbb{N}^*)\,\big((\forall X)\,(\forall Y) \in M_{p,q}(\mathbb{B})\big) :$$

$$\Big[(A \otimes X) \,.\, (A \otimes Y)\Big]_{ij} = \Big[\bigvee_{k=1}^{p} a_{ik} \, x_{kj}\Big]\Big[\bigvee_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \, y_{\ell j}\Big]$$

$$= \bigvee_{k,\ell} a_{ik} \, a_{i\ell} \, x_{kj} \, y_{\ell j} = \bigvee_{k} a_{ik} \, x_{kj} \, y_{kj} \quad \text{(d'après II - B3)}$$

$$= [A \otimes (X.Y)]_{i,j}$$

Remarques

1) $A \in \delta_{n,p}(\mathbb{B}) \iff A \otimes {}^{t}A \leqslant I$

2) On aurait pu remplacer dans la définition (II - B1)

$(\forall q \in \mathbb{N}^*)$ par $(\exists\, q \in \mathbb{N}^*)$

.../...

Dans le cas de matrices carrées les conditions

- A est p.o.g. et d.a.g.
- A est p.o.d. et d.a.d.
- A est inversible

sont équivalentes. En effet la condition

$$^{\dagger}A \otimes A = I$$

ou $A \otimes {}^{\dagger}A = I$ est nécessaire et suffisante (cf. [R5]) pour que A soit inversible.

Proposition[II - B2]

$\gamma_n(\mathbb{B})$ est un sous demi groupe multiplicatif de $M_n(\mathbb{B})$ et un inf-sous demi treillis.

Preuve

En effet $(A,B) \in [\gamma_n(\mathbb{B})]^2$ implique

$$^{\dagger}(A \otimes B) \otimes A \otimes B = {}^{\dagger}B \otimes {}^{\dagger}A \otimes A \otimes B \leqslant I$$

Par ailleurs si $A \in \gamma_n(\mathbb{B})$ et si $X \leqslant A$

alors $^{\dagger}X \otimes X \leqslant {}^{\dagger}A \otimes A \leqslant I$ et $X \in \gamma_n(\mathbb{B})$

Donc si A et B appartiennent à $\gamma_n(\mathbb{B})$ $A.B \leqslant A$, et AB appartient à $\gamma_n(\mathbb{B})$.

.../...

Proposition [II - B3]

$A \in M_{n,p}(\mathcal{B})$ est distrib utive à gauche si et seulement si

$$(II - B4) \quad A \otimes \overline{X} \ll \overline{A \otimes X} \quad \left(\forall X \in M_{p,q}(\mathcal{B})\right)\left(\forall q \in \mathbb{N}^*\right)$$

Preuve

Supposons A distributive à gauche. Alors $\left(\forall X \in M_{p,q}(\mathcal{B})\right)$ $\left(\forall q \in \mathbb{N}^*\right)$

$$A \otimes (X.\overline{X}) = 0 = (A \otimes X) \,.\, (A \otimes \overline{X}) \quad \text{(c.q;f.d.)}$$

Réciproquement, si (II - B4) vaut , alors on l'applique à

$\Omega^j \in M_{p,1}(\mathcal{B})$ définie par $(\Omega^j)_i = \delta^j_i$. Il vient

$$(A \otimes \Omega^j)_i = a_{ij}$$

$$(A \otimes \Omega^j)_i = \bigvee_{k \neq j} a_{ik}$$

et (II - B4) implique $a_{ij}.a_{ik} = 0 \quad (k \neq j)$

.../...

II - C - Matrices unitaires -

On a vu précédemment qu'une matrice p.o.g. et d.à.g. est nécessairement orthogonale, c'est-à-dire ici inversible. Nous allons maintenant associer différemment les propriétés ce qui permettra d'introduire naturellement les homomorphismes matriciels.

Définition

On dit que $A \in M_{n,p}(\mathbb{B})$ est unitaire à gauche (u.g) si A est pseudo orthogonale à gauche et distributive à droite, autrement dit si

$$\begin{cases} \bigvee_k a_{ki} = 1 \qquad (\forall_i) & \text{(II - C1)} \\ a_{ik} \cdot a_{jk} = 0 \qquad i \neq j & \text{(II - C2)} \end{cases}$$

De la même façon une matrice est unitaire à droite (u.d.) si A est p.o.d. et distributive à gauche, et vérifiera donc :

$$\bigvee_k a_{ik} = 1 \; ; \; a_{ki}\, a_{kj} = 0 \quad (i \neq j) \qquad \text{(II - C3)}$$

Soit $U_{n,p}(\mathbb{B})$ (resp. $T_{n,p}(\mathbb{B})$) l'ensemble des matrices unitaires à gauche (resp. à droite). On a

$$A \in U_{n,p}(\mathbb{B}) \iff {}^{\dagger}A \in T_{p,n}(\mathbb{B})$$

Les résultats des paragraphes précédentsmontrent que

$$A \in U_{n,p}(\mathbb{B}) \iff \left\{ {}^{\dagger}A \otimes A \gg I_p \text{ et } A \otimes {}^{\dagger}A \ll I_n \right\} \qquad \text{(II - C4)}$$

.../...

Théorême [II - C1]

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{B})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\overline{A \otimes X} = A \otimes \overline{X} \qquad (\forall q \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall X \in M_{p,q}(\mathbb{B})) \quad \text{(II-C5)}$$

est que A soit unitaire à droite.

Preuve

$$\overline{A \otimes X} = A \otimes \overline{X} \Longleftrightarrow \overline{A \otimes X} \ll A \otimes \overline{X} \text{ et } A \otimes \overline{X} \ll \overline{A \otimes X}$$

et, d'après les propositions [II - A4] et [II - B3], ceci équivaut à

A p.o.d. et d.a.g.

Conséquence

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{B}) \qquad X \in M_{p,1}(\mathbb{B})$

et $\varphi_A : M_{p,1}(\mathbb{B}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{B})$

$$\varphi_A(x) = A \otimes x$$

φ_A est manifestement un V-homomorphisme. C'est un homomorphisme d'algèbre de Boole d'après le théorême [II - C1] si et seulement si $A \in T_{n,p}(\mathbb{B})$. Nous énoncerons (dans $\mathbb{B}^n$ et $\mathbb{B}^p$) :

Théorême [II - C2]

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'application associée à une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{B})$ soit un homomorphisme (d'Algèbre de Boole) de $\mathbb{B}^p$ dans $\mathbb{B}^n$ est que A soit unitaire à droite.

.../...

Applicatior

Si $\mathbb{B} = \langle 2 \rangle$, et si φ un homomorphisme quelconque de $\langle 2 \rangle^p$ sur $\langle 2 \rangle^n$, alors soit :

$$x = \bigvee_{i=1}^{p} x_i e_i$$

la décomposition canonique de $x \in \langle 2 \rangle^p$.

Alors $$\varphi(x) = \bigvee_{i=1}^{p} \varphi(x_i e_i) = \bigvee_{n=1}^{p} x_i \varphi(e_i) \quad (\text{car } x_i \in \langle 2 \rangle)$$

Si l'on prend donc :

$$\varphi(e_i) = \bigvee_{j=1}^{n} a_i^j \quad f_j$$

On voit que dans le cas bivalent tout homomorphisme est associé à une matrice. Le théorême précédent a donc permis de reconnaître tous les homomorphismes d'algèbres de $\langle 2 \rangle^p$ sur $\langle 2 \rangle^n$. Les conditions (II - C1 et 2) s'interprètent ici simplement.

Dans le cas bivalent donc, chaque ligne doit en contenir un et un seul élément égal à 1, les autres étant nuls. Il y a donc p^n homomorphismes.

Ce dernier résultat peut s'expliquer autrement : si l'on désigne par Ω_n (resp.Ωp) l'ensemble des atomes de $\langle 2 \rangle^n$ (resp. $\langle 2 \rangle^p$), alors on sait que toute application "ponctuelle" de Ω_n dans Ωp induit $\hat{\varphi}$ et $\hat{\varphi}^{-1}$ (cette dernière de $\langle 2 \rangle^p$ dans $\langle 2 \rangle^n$ et que $\hat{\varphi}^{-1}$ est un homomorphisme d'Algèbres de Boole. On retrouve ici le fait que, dans le cas fini, tout homomorphisme est induit par une application ponctuelle (Cf. SIKORSKI [S1])

.../...

emarques :

Dans le cas de matrices carrées unitaires à gauche, on a

1) $M \in U_n(\mathcal{B}) \Longleftrightarrow {}^tM \otimes M \geqslant I$ et $M \otimes {}^tM \leqslant I$

t donc $({}^tM \otimes M) \otimes {}^tM \geqslant {}^tM$ Mais aussi

$${}^tM \otimes (M \otimes {}^tM) \leqslant {}^tM$$

onc ${}^tM \otimes M \otimes {}^tM = {}^tM$ et aussi

$$M \otimes {}^tM \otimes M = M$$

2) Si $M \in U_n(\mathcal{B})$ alors

$$M \otimes {}^tM = \operatorname{diag}\left\{\bigvee_k a_{ik}\right\} = \operatorname{diag}\left\{(M \otimes e)_i\right\}$$

3) Soit U^i $(i \in [1,n])$ la famille de n matrices carrées $(n \geqslant n)$ unitaires à gauche du type particulier

$$(U^i)_{h,k} = \delta^i_h$$

lors $$\left[U^i \otimes {}^t(U^j)\right]_{p,q} = \bigvee_\ell \delta^i_p \, \delta^j_q = \delta^i_p \, \delta^j_q$$

onc

$$U^i \otimes {}^t(U^j) = E_{ij} \text{ (matrices de la base canonique)}$$

Cette remarque sera utilisée au paragraphe (II - E).

Remarque

$${}^t(U^i) \otimes \ddot{U}^j = (\delta^j_i) \cdot e$$

- Eléments minimaux dans $G_{n,p}(\mathcal{B})$

Proposition [II - C3]

Une condition nécessaire et suffisante pour que

$A \in G_{n,p}(\mathcal{B})$ est qu'il existe $M \in U_{n,p}(\mathcal{B})$ telle que

$$A \geqslant M \qquad [II - C6]$$

Preuve

La condition est évidemment suffisante d'après (II - A5) puisque M appartient alors à $G_{n,p}(\mathcal{B})$. Elle est nécessaire, puisque si $A \in G_{n,p}(\mathcal{B})$, on prend, par exemple, avec $i \in [1,p]$:

$$\begin{cases} m_{1i} = a_{1i} \\ m_{ki} = \overline{a_{1i}} \cdot \overline{a_{2i}} \cdot \overline{a_{k-1,i}} \cdot a_{ki} & 2 \leqslant k \leqslant n \end{cases}$$

On a évidemment $m_{ki} \leqslant a_{ki} \quad (\forall k) \ (\forall i)$

De plus si $i < j$ par exemple -

$$m_{ki} \leqslant a_{ki} \qquad m_{kj} \leqslant \overline{a_{ki}}$$

et donc $m_{ki} \cdot m_{kj} = 0 \qquad (i \neq j)$

Enfin, on montre par récurrence que

$$\bigvee_{k=1}^{n} m_{ki} = 1$$

.../...

En effet $m_{1i} \vee m_{2i} = a_{1i} \vee \overline{a_{1i}} \cdot a_{2i} = a_{1i} \vee a_{2i}$

Si $\bigvee_{k=1}^{j} m_{ki} = \bigvee_{k=1}^{j} a_{ki}$, alors

$$\bigvee_{k=1}^{j+1} m_{ki} = \overline{a_{1i}} \cdots \overline{a_{j,i}} \cdot a_{j+1,i} \vee a_{1i} \vee \cdots \vee a_{ji}$$

$$= a_{1i} \vee \cdots \vee a_{ji} \vee a_{j+1,i}$$

et donc $\bigvee_{k=1}^{n} m_{ki} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{ki} = 1$

Proposition [II - C4] : L'ensemble $U_{n,p}(\mathcal{B})$ est mince.

Il faut démontrer que deux matrices distinctes de $U_{n,p}(\mathcal{B})$ sont incomparables.

Lemme Les conditions

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 = \beta_1 \vee \beta_2 \; ; \quad \alpha_1 \ll \beta_1 \; ; \; \alpha_2 \ll \beta_2$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = 0 \; ; \qquad \beta_1 \beta_2 = 0$$

impliquent $\alpha_1 = \alpha_2$ et $\beta_1 = \beta_2$.

Preuve

Considérons le système précédent aux inconnues α_1 et α_2 et appliquons la méthode des éliminations successives. Il vient

$$(\alpha_1 \vee \alpha_2)\, \overline{\beta}_1\, \overline{\beta}_2 \vee \overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\alpha}_2\, (\beta_1 \vee \beta_2) \vee \alpha_1\, \overline{\beta}_1 \vee \alpha_2\, \overline{\beta}_2 \vee \alpha_1\, \alpha_2 \vee \beta_1\, \beta_2 = 0$$

Soit

$$\alpha_1 \left[\overline{\beta}_1 \vee \alpha_2\right] \vee \overline{\alpha}_1 \left[\overline{\alpha}_2 (\beta_1 \vee \beta_2)\right] \vee \alpha_2\, \overline{\beta}_2 \vee \beta_1\, \beta_2 = 0 \quad (II\text{-}C7)$$

.../...

dont la condition de compatibilité est

$$\alpha_2\ \bar{\beta}_2 \ \vee\ \beta_1\ \beta_2 \ \vee\ \bar{\alpha}_2\ \bar{\beta}_1\ \beta_2 = 0$$

Avec $\beta_1\ \beta_2 = 0$, les solutions sont fournies par

$$\bar{\beta}_1\ \beta_2 \lessdot \alpha_2 \lessdot \beta_2$$

Mais $\beta_1\ \beta_2 = 0 \iff \beta_2 \lessdot \bar{\beta}_1 \iff \beta_2\ \bar{\beta}_1 = \beta_2$

reste donc : $\alpha_2 = \beta_2$. et en substituant dans (II - C7) :

$$\bar{\beta}_2\ \beta_1 \lessdot \beta_1 \lessdot \beta_1\ \bar{\beta}_2 = \beta_1 \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

Pour démontrer la proposition annoncée il suffit alors, (considérant chacune des colonnes) de prouver que les conditions

$$\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i = \bigvee_{i=1}^{n} \beta_i \qquad \alpha_i \lessdot \beta_i \quad (\forall\, i) \qquad \text{(II - C8)}$$

$$\alpha_i\ \alpha_j = 0 \qquad \beta_i\ \beta_j = 0 \quad (i \neq j)$$

impliquent $\alpha_i = \beta_i \quad (\forall\, i)$,

pour cela, et supposant vraie la propriété précédente à l'ordre (n-1) on pose

$$\sigma_1 = \bigvee_{i=2}^{n} \alpha_i \qquad \sigma_2 = \bigvee_{i=2}^{n} \beta_i$$

Alors l'ensemble des conditions (II - C8) implique :

$$\alpha_1 \vee \sigma_1 = \beta_1 \vee \sigma_2 \qquad \sigma_1 \lessdot \sigma_2 \qquad \alpha_1 \not< \beta_1$$

et $$\alpha_1 \cdot \sigma_1 = \beta_1 \cdot \sigma_2 = 0$$

.../...

Alors, d'après le lemme, $\alpha_1 = \beta_1$ et $\sigma_1 = \sigma_2$ ce qui prouve la récurrence.

Conclusion :

$U_{n,p}(\mathbb{B})$ est donc l'ensemble des éléments minimaux de $G_{n,p}(\mathbb{B})$.

.../...

II - D - Matrices symétriques et anti-symétriques -

Les matrices symétriques de $M_n(\mathbb{B})$ (définies par ${}^tA = A$) forment une sous-algèbre de Boole $S_n(\mathbb{B})$ de $M_n(\mathbb{B})$. Pour définir les matrices antisymétriques, on prendra :

Définition

$A \in M_n(\mathbb{B})$ est antisymétrique si

$$A \cdot {}^tA = 0 \qquad (II - D1)$$

L'ensemble $A_n(\mathbb{B})$ des matrices antisymétriques n'est pas une sous algèbre, mais seulement un inf - demi treillis.

Proposition [II - D1]

$$(\forall X \in M_n(B)) :$$

$$X = \alpha \vee \beta$$

avec $\alpha \in S_n(B)$; $\beta \in A_n(B)$; $\alpha \cdot \beta = 0$

Preuve

$X = {}^tX.X \vee X.{}^t\bar{X}$ répond à la question

Si l'on a : $X = \alpha \vee \beta$; $\alpha \in S_n(B)$; $\beta \in A_n(B)$; $\alpha \cdot \beta = 0$,

alors ${}^tX = \alpha \vee {}^t\beta$ et $X \cdot {}^tX = \alpha$ De même

$$X \cdot {}^t\bar{X} = (\alpha \vee \beta)(\bar{\alpha} \vee {}^t\bar{\beta}) = \bar{\alpha} \cdot \beta\, {}^t\bar{\beta} = \beta \cdot {}^t\bar{\beta} = \beta$$

.../...

II - E - Matrices sous idempotentes -

Un élément sous-idempotent d'un gerbier est (cf. [B4], p. 328) un élément a tel que $a \cdot a \leqslant a$. On se propose de donner ici une condition dans le gerbier $(M_n(\mathcal{B}), V, \otimes)$ pour qu'une matrice carrée M soit sous-idempotente .

Appelant U^i les matrices unitaires à gauche définies au paragraphe (II - C), on définit $\varphi^i : M_n(\mathcal{B}) \longrightarrow M_n(\mathcal{B})$ $(i \in [1,n])$.

$$\varphi^i(M) = M \vee (M \otimes U^i \otimes {}^t(U^i) \otimes M)$$

Lemme 1

$$M \vee M^2 \geqslant \varphi^i(M) \geqslant M \qquad \text{(II - E1)}$$

On a $\varphi^i(M) = M \vee (M \otimes E_{ii} \otimes M) \geqslant M$

de plus $E_{ii} \leqslant I$ ce qui assure le résultat.

Lemme 2

M est sous idempotente si et seulement si

$$\varphi^i(M) = M \qquad (\forall i) \qquad \text{(II - E2)}$$

Preuve

En effet, si M est sous-idempotente $M \vee M^2 = M$ et le résultat est assuré d'après (II - E1). Réciproquement, si (II-E2) vaut , alors :

$$M \geqslant M \otimes E_{ii} \otimes M \qquad (\forall i)$$

et $$M \geqslant \bigvee_{i=1}^{n} (M \otimes E_{ii} \otimes M) = M \otimes \bigvee_{i=1}^{n} E_{ii} \otimes M = M^2$$

.../...

Proposition [II - E1]

$$\varphi^i(M) = M \qquad (\forall i) \Longleftrightarrow M = \bigvee_{k=1}^{n} M^k = \hat{M}$$

Preuve

Si $\varphi^i(M) = M$ $(\forall i)$ alors

$$M^2 \leqslant M \Longrightarrow M^n \leqslant M^{n-1} \leqslant \ldots\ldots \leqslant M^2 \leqslant M \Longrightarrow M = \hat{M}$$

Réciproquement si $\hat{M} = M$ alors $M \geqslant M^2$ (c.q.f;d.)

Cette proposition permet d'étendre à une algèbre de Boole quelconque le théorême donné par Roy (cf.[R2]) en théorie des graphes (c'est-à-dire en bivalent) pour la détermination de $\hat{M}$.

III Equations matricielles

III - A - Pavoïdes. Quasi - pavés

Soit T un treillis et $n \in \mathbb{N}^*$. Un pavoïde de T^n est, par définition une partie non vide P de T^n telle que :

$(\forall (x_1,\ldots x_n) \in P)\ (\forall i \in [1,n])$, l'ensemble

$\{\omega ; \omega \in T \mid (x_1,\ldots, x_{i-1}, \omega, x_{i+1},\ldots x_n) \in P\}$ soit un intervale de T.

Pour n=1, un pavoïde sera un intervalle de T.

On a quelque propriétés simples : par exemple

- un intervalle de T^n est un pavoïde
- si P est un pavoïde de T^n et si $(x_1,\ldots,x_n) \in P$, alors

$$\{(\omega_{p+1},\ldots,\omega_n)\ T^{n-p} \mid (x_1,\ldots x_p, \omega_{p+1},\ldots\omega_n) \in P\}$$

est un pavoïde de T^{n-p}.

- une intersection fine non vide de pavoïdes est un pavoïde.

Une partie non vide A de T^n sera dite cylindrique, si $(\forall i \in [1,n])$:

$$A^i = \{\omega^i \in T \mid \exists (x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_n) \in T^{n-1} \mid$$

$(x_1,\ldots x_{i-1},\omega^i, x_{i+1},\ldots x_n) \in A\}$ est un intervalle de T.

.../...

Il est facile de voir (par exemple sur le treillis produit R^2) que ces deux notions (pavoïde et cylindrique) ne s'impliquent dans aucun sens. Une partie convexe compacte du treillis topologique R^2 est un pavoïde cylindrique, mais la réciproque est inexacte.

Nous appellerons quasi-pavé de T^n un pavoïde cylindrique.

Les pavoïdes et les quasi-pavés semblent particulièrement convenir à la description de la structure de l'ensemble des solutions de certaines équations booléennes. Par exemple :

Proposition [III - A1]

Si f est un polynôme booléen à n variables l'ensemble des solutions de

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

est, s'il n'est pas vide, un pavoïde de $\mathbb{B}^n$.

Preuve

Le théorême de Lagrange fournit pour l'inconnue x_1, par exemple

$$x_1 \, f_1(x_2, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_1 \, f_2(x_2, \ldots x_n) = 0$$

et si $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ est une solution, on a, pour l'inconnue x_1 :

$$x_1 \prec \left[f_2(x_2^*, \ldots, x_n^*), \bar{f}_1(x_2^*, \ldots, x_n^*) \right]$$

La notion de quasi-pavé se retrouvera au paragraphe suivant, pour la résolution d'équations matricielles.

.../...

B - Equations et inéquations matricielles linéaires -

Le théorême [I - A5] a fourni une condition nécessaire et suffisante de compatibilité de l'équation matricielle

$$A \otimes X = B \qquad \text{(III - B1)}$$

On se propose ici de réconnaître (dans $\mathbb{B}^n$ isomorphe à $M_{n;1}(\mathbb{B})$ la structure de l'ensemble des solutions et donner en même temps une méthode (algorithmique) de résolution effective. Pour résoudre (III - B1) on s'attachera d'abord à un problème un peu plus général.

Théorême [III - B1]

Soient C et D $\in M_{m,1}(\mathbb{B})$ $(D \leqslant C)$, $A \in M_{mn}(\mathbb{B})$ et $X \in M_{n,1}(\mathbb{B})$. L'ensemble des $(x_1,\ldots,x_n)$ tels que

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

soit solution de

$$D \leqslant A \otimes X \leqslant C \qquad \text{(III - B2)}$$

forme, s'il n'est pas vide, un quasi-pavé de $M_{n,1}(\mathbb{B})$, d'élément maximum $\langle A,C \rangle$.

Preuve On pose

$$\bigvee_{j=2}^{n} a_{ij}\, x_j = \sigma_i \qquad i \in [1,m]$$

On est conduit au système équivalent:

.../...

$$d_i \ll a_{i1} x_1 \vee \sigma_i \ll C_i \qquad i \in [1,m]$$

qui s'écrit :

$$d_i \overline{(a_{i1} x_1 \vee \sigma_i)} \vee (a_{i1} x_1 \vee \sigma_i)\,\overline{C}_i = 0$$

$$d_i (\overline{a_{i1}} \vee \overline{x_1}) \cdot \overline{\sigma}_i \vee \sigma_i \overline{C}_i \vee a_{i1} x_1 \overline{C}_i = 0 \qquad \text{(III - B3)}$$

Ecrivons que cette équation admet des solutions en σ_i. Alors

$$a_{i1} x_1 \overline{C}_i \vee \overline{C}_i d_i (\overline{a_{i1}} \vee \overline{x_1}) = 0$$

soit ici, puisque $d_i \ll C_i$:

$$a_{i1} x_1 \overline{C}_i = 0 \iff x_1 \ll \overline{a_{i1}} \vee C_i \qquad (\forall i)$$

Reste donc $x_1 \ll \prod_{i=1}^{m} (\overline{a_{i1}} \vee C_i) = \langle A, C \rangle_1$ (III - B4)

Cette condition remplie, on aura en substituant dans (III - B3) :

$$d_i (\overline{a_{i1}} \vee \overline{x_1}) \ll \sigma_i \ll C_i \qquad i \in [1,m]$$

ce qui s'écrit

$$D^{(1)} (x_1) \ll A^{(1)} \otimes X^{(1)} \ll C \qquad \text{(III - B5)}$$

où $A^{(1)}$ est la matrice de $M_{m,n-1}(B)$ obtenue en privant A de sa première colonne, et ${}^{t}(X^{(1)}) = [x_2, \ldots, x_n]$. La relation (III-B5) est analogue à (III - B2). Pour que (III - B5) admette des solutions il faut et il suffit que

$$D^{(1)} \ll A^{(1)} \otimes \langle A, {}^{(1)}C \rangle \qquad \text{(III - B6)}$$

.../...

En effet

$$A^{(1)} \otimes X^{(1)} \ll C \Longleftrightarrow X^{(1)} \ll \langle A^{(1)}, C \rangle$$

et ceci implique

$$A^{(1)} \otimes X^{(1)} \ll A^{(1)} \otimes \langle A^{(1)}, C \rangle \qquad \text{(III - B7)}$$

Réciproquement si (III - B7) est remplie, alors :

$\Omega^{(1)} = \langle A^{(1)}, C \rangle$ vérifie

$A^{(1)} \otimes \Omega^{(1)} \ll C$ d'après (I - A3)

et $D^{(1)} \ll A^1 \otimes \Omega^1$ d'après (III - B6)

Posons

$$[A^{(1)} \otimes \langle A^{(1)}, C \rangle] = \beta$$

on a donc $d_i \ (\overline{a_{i1}} \vee \overline{x_1}) \ll \beta_i$

$$d_i \ \overline{a_{i1}} \ \overline{\beta_i} \vee d_i \ \overline{x_1} \ \overline{\beta_i} = 0$$

qui implique, d'une part $\bigvee_i d_i \ \overline{a_{i1}} \ \overline{\beta_i} = 0$ (III - B8)

d'autre part

$$x_1 \gg d_i \ \overline{\beta_i} \ (\forall i) \Leftrightarrow x_1 \gg \bigvee_{i=1}^{m} d_i \ \overline{\beta_i} \qquad \text{(III - B9)}$$

La condition (III - B8) est une condition sur les données pour que le problème ait des solutions. Si elle est remplie (III - B9) est alors nécessaire et suffisant et s'écrit :

$$x_1 \gg {}^{\dagger}D \otimes \overline{\beta} = {}^{\dagger}D \otimes \overline{A^{(1)} \otimes \langle A^{(1)}, C \rangle}$$

.../...

En résumé, pour que l'équation (III - B2) admette des solutions, il est nécessaire et suffisant que le système ci-dessous en admette :

$$D^{(1)}(x_1) \lll A^{(1)} \otimes X^{(1)} \lll C \; ; \; x_1 \in [\omega_1, \Omega_1] \qquad \text{(III - B10)}$$

avec

$$\omega_1 = {}^{\dagger}D \otimes \overline{A^{(1)} \otimes \langle A^{(1)}, C \rangle} \; ; \; \Omega_1 = \langle A, C \rangle_1$$

$$\left[D^{(1)}(x_1)\right]_i = d_i \left(\overline{a_{i1}} \vee \overline{x_1}\right)$$

$X^{(1)}$ ne contenant plus l'inconnue x_1 et ce raisonnement pouvant être répété pour x_i ($\forall i$), il en résulte que l'ensemble des solutions est soit vide, soit une partie cylindrique de $\mathbb{B}^n$.

Par ailleurs l'ensemble des conditions (III - B10) est analogue à (III - B2) et ne contient plus que (n-1) variables. Si l'on désigne par $A^{(k)} \in M_{m,n-k}(\mathbb{B})$ la matrice A, privée de ses k premières colonnes on aura donc :

$$D^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) \lll A^{(k)} \otimes X^{(k)} \lll C \qquad \text{où} \qquad X^k = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

et $D^{(k)}$ définie par

$$\left[D^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)\right]_i = \left(\overline{a_{ik}} \vee \overline{x_k}\right) \left[D^{(k-1)}(x_1,\ldots,x_{k-1})\right]_i$$

$$x_k \in \left[\omega_k, \Omega_K\right] \; ; \; \Omega_K = \langle A, C \rangle_k$$

$$\omega_k(x_1,\ldots,x_{k-1}) = {}^{\dagger}\left(D^{(k-1)}(x_1,\ldots,x_{k-1})\right) \otimes \overline{A^{(k)} \otimes /A^{(k)}, C\rangle}$$

et donc, en fin de compte, à :

$$d_i^{(n-1)} \lll a_{in} \cdot x_n \lll C_i \qquad i \in [1,m]$$

.../...

Soit $\bigvee_{i=1}^{m} d_i^{(n-1)} (x_1, \ldots, x_{n-1}) \ll x_n \ll \widetilde{\bigvee_i} (\overline{a_{in} \vee C_i}) = \langle A, C \rangle_n$

Il résulte de cette dernière relation que si le système proposé à des solutions et si $(x_1, \ldots, x_n)$ en est une, l'ensemble J_n

$$J_n = \left\{ y \in \mathbb{B} \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \text{ soit solution} \right\}$$

est un intervalle de $\mathbb{B}$. Ce résultat pouvant être naturellement établi pour x_i $(\forall i)$, il en résulte que l'ensemble des solutions est également un pavoïde, d'où le résultat annoncé.

Remarques

1) A chaque étape la borne supérieure Ω_K ne dépend que des données. On retrouve la proposition [I - A5], qui exprime donc que la borne supérieure du quasi-pavé des solutions doit être solution ;

2) On a $D^{(n)} \ll D^{(n-1)} \ll \ldots \ll D^{(1)} \ll D$

3) ω_1 constitue la borne inférieure de l'ensemble des valeurs de x_1 pour lesquelles il y a des solutions. Si donc on désigne par $^{(k)}A$ la matrice de $M_{m,n-1}(\mathbb{B})$ obtenue en privant A de sa $k^{\text{ième}}$ colonne, on aura pour l'inconnue x_k :

$$U^{(k)} \ll x_k \ll \langle A, C \rangle_k$$

$$\text{où } U^{(k)} = {}^tD \otimes \overline{{}^{(k)}A \otimes \langle {}^{(k)}A, C \rangle} \qquad \text{(III - B 11)}$$

Il existe donc une borne inférieure à l'ensemble des solutions (qui n'est pas nécessairement solution). L'ensemble des solutions est donc contenu dans le produit d'intervalles :

$$U^{(j)} \ll x_j \ll \langle A, C \rangle_j$$

.../...

4) Ces résultats s'étendent "naturellement" au cas où X, C et D sont des matrices rectangles.

5) Dans la résolution effective de (III - B2) par la méthode algorithmique proposée, il ne sera pas nécessaire d'écrire à chaque étape les conditions de compatibilité analogues à (III - B8). En effet, l'ensemble de ces conditions est équivalent à

$$D \lessdot A \otimes \langle A,C \rangle$$

obtenue directement à partir de (III - B2) et de (I - A2).

6) Le théorême précédent s'applique naturellement au cas C = D (cf. (III - B1))

Cas des matrices unitaires

Proposition [III - B2]

Si A est unitaire à droite l'ensemble des solutions de

$$A \otimes X = B$$

est, soit vide, soit un intervalle de $M_{n,p}(\mathbb{B})$.

Preuve

Si l'ensemble des solutions n'est pas vide, alors $\langle A , B \rangle$ est solution, cependant que pour toute solution X, on a :

$$X \lessdot \langle A,B \rangle$$

mais $A \otimes X = B \iff \overline{B} = \overline{A \otimes X} = A \otimes \overline{X}$

et $\langle A,\overline{B} \rangle$ est solution, cependant que toute solution X vérifiera

$$\overline{X} \lessdot \langle A,\overline{B} \rangle \quad \text{ou} \quad X \gtrdot \overline{\langle A,\overline{B} \rangle}$$

.../...

Puisqu'il y a des solutions : $\overline{\langle A,\bar{B}\rangle} \ll \langle A,B\rangle$

et si : $X_o = \overline{\langle A,\bar{B}\rangle} \ll X \ll \langle A,B\rangle = X_1$, alors :

$$A \oslash X_o = B \ll A \otimes X \ll A \oslash X_1 = B$$

Donc l'ensemble des solution est $J = \left[\overline{\langle A,\bar{B}\rangle}, \overline{\langle A,B\rangle}\right]$

Proposition [III - B3]

Si A est unitaire à gauche, alors une condition nécessaire et suffisante pour que

$$A \otimes X = B \quad \text{soit compatible}$$

est que $B \ll A \otimes E$ (III - B12)

Preuve

La condition est manifestement nécessaire, que A soit unitaire ou non. Par ailleurs, la condition

$$A \otimes \langle A,B\rangle = B$$

est nécessaire et suffisante.

or $\overline{{}^{\dagger}A \otimes \bar{B}} = {}^{\dagger}A \otimes B$ car ${}^{\dagger}A$ est unitaire à droite

et donc $A \oslash {}^{\dagger}A \otimes B = B$

or, d'après la remarque 2 du paragraphe (II - C)

$$(A \otimes {}^{\dagger}A) = \text{diag.} \left\{ \bigvee_k a_{ik} \right\} = \text{diag.} \ (\lambda_i)$$

Donc $\lambda_i \cdot b_{ij} = b_{ij} \Longleftrightarrow b_{ij} \ll \lambda_i = \bigvee_k a_{ik} = (A \otimes E)_i$

.../...

Inéquations linéaires

L'inéquation $A \otimes X \ll B$ admet pour ensemble de solution le segment $[0, \langle A,B \rangle]$. Les résultats sont plus délicats dans le cas de $A \otimes X \gg B$. Mentionnons néanmoins une condition suffisante :

Proposition [III - B4]

$$A \in M_{m,n}(\mathcal{B}) \quad ; \quad X \in M_{n,p}(\mathcal{B}) \; ; \quad B \in M_{m,p}(\mathcal{B})$$

s'il existe $C \in M_{m,n}(\mathcal{B})$ telle que

$$A \gg C \qquad B \ll C \otimes e \qquad \text{(III - B13)}$$

Alors $\left[{}^{\dagger}C \otimes B, e\right]$ est un intervalle de solutions de

$$A \otimes X \gg B \qquad \text{(III - B 14)}$$

Preuve

Il suffit de démontrer qu'avec les hypothèses prises sur C :

$$A \otimes {}^{\dagger}C \otimes B \gg B$$

or

$$(A \otimes {}^{\dagger}C \otimes B)_{i,j} = \bigvee_{k,\ell} a_{ik}\, C_{\ell k}\, b_{\ell j} \gg \bigvee_{\substack{k \\ \ell = i}} a_{ik}\, c_{\ell k}\, b_{\ell j}$$

$$= \bigvee_{k} a_{ik}\, C_{ik}\, b_{ij} = b_{ij} \bigvee_{k} a_{ik}\, C_{ik} = b_{ij} \left[\bigvee_{k} C_{ik} \right]$$

or $\bigvee_{k} C_{ik} = (C \otimes e)_{i,j}$ $(\forall j)$ et

$$b_{ij}\, (C \otimes e)_{i,j} = b_{ij} \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

.../...

Conséquence 1

Si (III - B14) admet des solutions alors $\left[{}^{\dagger}A \otimes B, e\right]$ est un intervalle de solution. En effet, si X est une telle solution, alors :

$$A \otimes e \gg A \otimes X \gg B$$

et, des conditions

$$A \gg A \qquad B \ll A \otimes e$$ on déduit que

$\left[{}^{\dagger}A \otimes B, e\right]$ est un intervalle de solutions. Autrement dit :

$$A \otimes e \gg B \implies A \otimes {}^{\dagger}A \otimes B \gg B$$

Conséquence 2

Si $A \gg B$ alors comme trivialement

$$B \ll e \otimes B$$

on conclut que $\left[{}^{\dagger}B \otimes B, e\right]$ est un intervalle de solutions.

.../...

C - Sur certaines équations et inéquations non linéaires $\left(A \in M_n(B) \; ; \; X \in M_{n,p}\right)$

a) $(A \otimes X) \underset{v}{} (B \otimes \bar{X}) = 0$ (III - C1)

Cette équation qui généralise [I - E2] admet des solutions si et seulement si

$$({}^{\dagger}A \otimes e) \cdot ({}^{\dagger}B \otimes e) = 0$$

L'ensemble des solutions est alors l'intervalle $\left[\langle \overline{B,0} \rangle \; , \langle A,0 \rangle\right]$
On notera la similitude des résultats avec ceux obtenus dans [R2] .

b) $A \otimes X \lessdot \bar{X}$ (III - C2)

Proposition [III - C1]

L'ensemble des solutions de (III - C2) est un inf. demi treillis d'élément minimum 0 (*)

Par ailleurs, d'après (I - A2) on tire

$A \otimes X \lessdot \bar{X} \implies X \lessdot \overline{{}^{\dagger}A \otimes X} \Rightarrow {}^{\dagger}A \otimes X \lessdot \bar{X}$. Donc :

Proposition [III - C2]

Les équations $A \otimes X \lessdot \bar{X}$ et ${}^{\dagger}A \otimes X \lessdot \bar{X}$ ont les mêmes solutions

Proposition [III - C3]

L'ensemble des solutions des

$$A \otimes X \gtrdot \bar{X} \qquad \text{(III - C3)}$$

est un V - demi treillis d'élément maximum e.

(*) on appellera élément isotrope de A toute solution de (III-C2). .../...

Cas de l'équation $A \otimes X = \overline{X}$ (III - C4)

Cette équation semble d'un accès particulièrement délicat notamment en ce qui concerne l'établissement de conditions nécessaires et suffisantesde compatibilité. Il est facile de constater que l'existence et l'unicité ne sont pas toujours assurées. Après quelques propriétés préliminaires, on établira une construction de solution dans le cas d'une matrice carrée nilpotente.

Proposition [III - C4]

L'ensemble Ω des solutions de (III - C4) est mince.

Preuve

Supposons $\Omega \neq \emptyset$, et $X \in \Omega$

Alors si $y \gg X$ et $y \in \Omega$,

$$\overline{y} = A \otimes y \gg A \otimes X = \overline{X} \qquad \text{or } \overline{y} \not< \overline{X}$$

Donc $X = y$

On peut formuler différemment cette proposition : toute solution de (III - C4) est solution maximale de (III - C2) et minimalede (III- C3).

Nous appellerons dans la suite kernel de A toute solution de (III - C4)

On va donner ici une construction d'un kernel de ${}^{\dagger}A$, où A est une matrice nilpotente

.../...

mme 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{B})$; $X \in M_{n,p}(\mathbb{B})$

prend $X_o = 0$ et

$$X_k = \text{Sup.} \left\{ X \; ; \; X \in M_{n,p}(\mathbb{B}) \mid A \otimes X \ll X_{k-1} \right\}$$

Cette suite est croissante et stationnaire, vers $\hat{X}$, éfini par :

$$\hat{X} = \langle A^n, 0 \rangle \qquad \text{(III - C5)}$$

reuve

$$X_1 = \langle A, 0 \rangle = {}^{\dagger}\overline{A \otimes e} \Longrightarrow \overline{X_1} = {}^{\dagger}A \otimes e$$

$$X_2 = \langle A, X_1 \rangle = {}^{\dagger}\overline{A \otimes \overline{X}_1}$$

$$\overline{X_2} = {}^{\dagger}A \otimes \overline{X_1} = ({}^{\dagger}A)^2 \otimes e$$

i $\overline{X_{k-1}} = ({}^{\dagger}A)^{k-1} \otimes e$, alors

$$\overline{X_k} = \overline{\langle A, X_{k-1} \rangle} = {}^{\dagger}A \otimes \overline{X_{k-1}} = ({}^{\dagger}A)^k \otimes e$$

n a donc $X_k = \overline{({}^{\dagger}A)^k \otimes e}$ $\qquad (\forall k)$

r, de ${}^{\dagger}A \otimes e \ll e$, et du Théorême (0-5), on déduit

$$({}^{\dagger}A)^{n+1} \otimes e = ({}^{\dagger}A)^n \otimes e \lll ({}^{\dagger}A)^{n-1} \otimes e \lll \ldots\ldots \lll ({}^{\dagger}A \otimes e) \lll e$$

ce qui, en passant aux complémentaires, prouve que la suite st croissante et stationnaire. La limite est $\hat{X}$ définie par

$$\hat{X} = \overline{({}^{\dagger}A)^n \otimes e} = \langle A^n, 0 \rangle$$

.../...

a vu que la démonstration du lemme utilisait, là aussi essen-
ellement la "stabilité" de la suite des $A^p \otimes e$.

mme 2-

Si A est nilpotente, il existe une famille de (n+1)
éments $U_i \in M_{n,p}(\mathcal{B})$ tels que

$$U_o = 0 \; ; \quad U_i \cdot U_j = 0 \qquad (i \neq j) \; ; \quad \bigvee_0^n U_i = e \qquad \text{(III - C6)}$$

$$\text{et} \qquad A \otimes U_j \ll \bigvee_0^{j-1} U_k \qquad j \in [1,n] \qquad \text{(III - C7)}$$

euve

Le lemme précédent montre que si A est nilpotente,
= e. On construit donc la suite

$$0 = X_o \ll X_1 \ll \cdots \ll X_n = e$$

on définit

$$U_o = 0 \; ; \quad U_k = X_k \cdot \overline{X_{k-1}} \qquad k \in [1,n]$$

Alors $\bigvee_0^k U_j = X_k$ et $\bigvee_0^n U_k = X_n = e$

De plus si $i < j$

$$U_i \cdot U_j = X_i \cdot \overline{X_{i-1}} \cdot X_j \cdot \overline{X_{j-1}} = X_i \cdot \overline{X_{j-1}}$$

et $i \ll j-1$ implique $X_i \ll X_{j-1}$ donc $U_i \cdot U_j = 0$

Enfin $A \otimes U_j \ll A \otimes X_j \ll X_{j-1} = \bigvee_0^{j-1} U_k$

.../...

éorême [III - C5]

Soit A nilpotente. Les U_i était définis comme précémment, on prend : $S_o = \sigma_o = 0$, et par récurrence :

$$\begin{cases} S_k = U_k \cdot \overline{{}^{\dagger}A \otimes \sigma_{k-1}} \\ \sigma_k = \bigvee_{o}^{k} S_j \end{cases} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

ors σ_n est un kernel de ${}^{\dagger}A$.

euve

$$\sigma_n \geqslant \sigma_{k-1} \quad (\forall k) \Longrightarrow {}^{\dagger}\overline{A \otimes \sigma_{k-1}} \geqslant {}^{\dagger}\overline{A \otimes \sigma_n}$$

$$S_k = U_k \cdot {}^{\dagger}\overline{A \otimes \sigma_{k-1}} \geqslant U_k \cdot {}^{\dagger}\overline{A \otimes \sigma_n}$$

Soit $\sigma_n \geqslant (U_o \vee U_1 \vee \ldots \vee U_n) \cdot {}^{\dagger}\overline{A \otimes \sigma_n} = {}^{\dagger}\overline{A \otimes \sigma_n}$

r ailleurs

$$S_k \leqslant {}^{\dagger}\overline{A \otimes \sigma_{k-1}} \Longleftrightarrow A \otimes S_k \leqslant \overline{\sigma_{k-1}} = \overline{\prod_{1}^{k-1} S_j}$$

plus si $j \geqslant k$ $\quad (A \otimes S_k) \cdot S_j = 0$ En effet

$$(A \otimes S_k) \cdot S_j \leqslant (A \otimes U_k) \cdot U_j \leqslant (U_1 \vee U_2 \vee \ldots \vee U_{k-1}) \cdot U_j = 0$$

d'après (III - C6)

.../...

onc $A \otimes S_k \ll \overset{n}{\underset{j=k}{\widetilde{\prod}}} \overline{S_j}$

donc $A \otimes S_k \ll \overset{n}{\underset{j=1}{\widetilde{\prod}}} \overline{S_j} = \overline{\sigma_n} \qquad (\forall k)$

donc $A \otimes \sigma_n \ll \overline{\sigma_n}$

cette dernière relation est équivalente (cf.(I - A2) à

$${}^{t}A \otimes \sigma_n \ll \overline{\sigma_n} \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

renons maintenant p = 1 et recherchons une condition nécessaire suffisante, pour que, X étant fixé, il existe A telle que :

$$A \otimes X = \overline{X} \qquad \text{(III - C8)}$$

roposition [III - C6]

Pour qu'il existe A dont X soit un kernel, il est nécessaire et suffisant que

$${}^{t}e \otimes X = 1$$

reuve

Pour que (III - C8) soit compatible en A, il faut, 'après [I - A5], que :

$$\overline{X \otimes {}^{t}X} \otimes X = \overline{X}$$

or $\overline{(X \otimes {}^{t}X)}_{i,k} = \overline{x_i} \vee \overline{x_k}$

donc $\overline{x_i} \bigvee_k x_k = \overline{x_i} \Longleftrightarrow \widetilde{\prod}_k \overline{x_k} = 0 \Longleftrightarrow {}^{t}e \otimes x = 1$

.../...

rollaire

Si ${}^{t}e \otimes X = 1$, l'ensemble des matrices possédant X
our kernel contient un élément maximum qui est la matrice symé-
ique

$$\tilde{A} = \overline{X \otimes {}^{t}X} \qquad \text{(III - C9)}$$

.../...

IV - Valeurs propres, vecteurs propres des matrices booléennes -

La notion de valeur propre et de vecteur propre pour une trice booléenne a été introduite par Rutherford dans [R5].

Les propriétés données ici constituent un prolongement de travail dans plusieurs directions. Les relations entre valeurs opres et vecteurs propres sont complexes et conduisent à deux tions parallèles : l'intervalle caractéristique d'un vecteur et pseudo-module attaché à un scalaire. Il s'introduira "naturelle-nt" deux scalaires fondamentaux d'une matrice (dénommés ω et Ω) i permettent d'élucider complètement un certain nombre de pro-èmes, notamment celui des valeurs propres unaires. Rappelons que ur $A \in M_n(\mathbb{B})$, λ sera appelée valeur propre de A s'il existe $\in M_{n,1}(\mathbb{B}) - \{0\}$ tel que

$$A \otimes x = \lambda x$$

Si λ est valeur propre, tout x solution de l'équation écédente (y compris, alors, $x=0$) est appelé vecteur propre att-ché à λ. (Cette définition est légèrement différente de celle nnée en [R5])

.../...

A - Intervalle caractéristique -

éorême [IV - A1]

Une condition nécessaire et suffisante pour que x $(x \neq 0)$ it vecteur propre de A est que :

$$\begin{cases} A \otimes x \leqslant x & \text{(IV - A1)} \\ {}^{\dagger}e \otimes A \otimes x \leqslant \langle x, A \otimes x \rangle & \text{(IV - A2)} \end{cases}$$

Lorsque ces conditions sont satisfaites, l'ensemble des leurs propres attachées à x est un intervalle J_x de $\mathcal{B}$ (dit inter- lle caractéristique de x)

$$J_x = \left[{}^{\dagger}e \otimes A \otimes x, \ \langle x, A \otimes x \rangle \right] \quad \text{(IV - A3)} \quad (*)$$

euve

$A \otimes x = \lambda x$ équivaut à :

$$\lambda \left[x \ (\overline{A \otimes x}) \right] \vee \overline{\lambda} \left[A \otimes x \right] \vee \overline{x} \ (A \otimes x) = 0$$

i nécessite d'abord $A \otimes x \leqslant x$. Il reste ensuite

$$\lambda \left[x \ (\overline{A \otimes x}) \right] \vee \overline{\lambda} \left[A \otimes x \right] = 0$$

i est une équation à une inconnue du type étudié dans [I - E2]

condition de compatibilité est

$$({}^{\dagger}e \otimes A \otimes x) \ ({}^{\dagger}e \otimes x \ (\overline{A \otimes x})) = 0$$

le résultat annoncé s'ensuit car

$${}^{\dagger}\overline{e \otimes x\overline{y}} = \langle x, y \rangle$$

orsque les conditions (IV - A1 et 2) sont remplies,

(*) La dernière partie de cette proposition a été établie par Rutherford dans [R5]

. . . / . . .

ors toujours d'après [I - E2], l'ensemble des solutions est nné par

$$\lambda \in \left[j(x), m(x) \right] \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} j(x) &= {}^{\dagger}e \otimes A \otimes x \\ m(x) &= \langle x, A \otimes x \rangle \end{aligned}$$

marque

On peut, dans le cas où la condition $j(x) \leqslant m(x)$ est fectivement réalisée, donner une autre forme de $m(x)$.

$\overline{m}(x) = {}^{\dagger}e \otimes x(\overline{A \otimes x})$ Mais comme $j(x)$ est valeur propre

$$A \otimes x = j(x) \cdot x$$

$$\overline{m}(x) = {}^{\dagger}e \otimes \left\{ \left[\overline{j}(x) \cdot e \underset{v}{} \overline{x} \right] \cdot x \right\} = \overline{j}(x) \cdot ({}^{\dagger}e \otimes x)$$

d'où $m(x) = j(x) \underset{v}{} {}^{\dagger}\overline{e \otimes x}$ (IV - A4)

oposition [IV - A2]

Si A est pseudo-orthogonale à gauche, alors pour tout cteur propre x de A, on a :

$$A \otimes x = x$$

euve

Si A est pseudo-orthogonale à gauche alors

$${}^{\dagger}A \otimes e = e$$

x est vecteur propre de A pour λ, alors

$$J_x = \left[j(x), m(x) \right]$$

$$m(x) = ({}^{\dagger}e \otimes A \otimes x) \underset{v}{} {}^{\dagger}\overline{e \otimes x}$$

${}^{\dagger}e \otimes A = {}^{\dagger}e$ et $m(x) = 1$

.../...

Proposition [IV - A3]

Si A est nilpotente, alors pour tout vecteur propre de A on a

$$A \otimes x = 0$$

Preuve

$$A \otimes x = \lambda x \implies A^n \otimes x = \lambda x = 0 \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

on verra les réciproques de ces deux propriétés aux numéros [IV - C5 et 6].

Proposition [IV - A4]

Si A est p.o.g. alors A et A^p ont mêmes vecteurs propres ($\forall p \in \mathbb{N}^*$).

Preuve

Si x est vecteur propre de A pour λ, alors :

$$A \otimes x = \lambda x \implies A^p \otimes x = \lambda x$$

Réciproquement soit x un vecteur propre de A^p. D'après la structure de gerbier de $G_n(\mathcal{B})$, $A^p \in G_n(\mathcal{B})$ et donc

$$A^p \otimes x = \lambda x \implies A^p \otimes x = x \qquad \text{(cf. IV - A2)}$$

Donc $A^{p+1} \otimes x = A \otimes x$

Mais $A^{p+1} \otimes x = x$ $\qquad (A^{p+1} \in G_n(\mathcal{B}))$

et $A \otimes x = x$ donc x est vecteur propre de A.

.../...

Proposition [IV - A5]

Si A est p.o.g., A et $\hat{A}$ ont même vecteurs propres

Preuve

Si x est vecteur propre de A alors

$$A \otimes x = x \Longrightarrow A^p \otimes x = x \Longrightarrow \hat{A} \otimes x = x$$

Réciproquement, si x est vecteur propre de $\hat{A}$, alors comme $\hat{A}$ est p.o.g. (structure de gerbier de $G_n(\mathcal{B})$,

$$\hat{A} \otimes x = x = \bigvee_{k=1}^{n} A^k \otimes x$$

Ceci implique

$$x \geqslant A \otimes x \quad \text{et donc}$$

$$x \geqslant A \otimes x \geqslant A^2 \otimes x \geqslant \ldots\ldots \geqslant A^n \otimes x$$

Donc $$\bigvee_{k=1}^{n} A^k \otimes x = A \otimes x = x$$

Pseudo-solution propres

On dira que $x \neq 0$, est un pseudo-vecteur propre (p.v.p.) si l'équation

$$(A \otimes x) \oplus \lambda x = 0$$

(équivalente à $A \otimes x = \lambda x$)

est pseudo-compatible en λ (cf. I - H)

.../...

Proposition [IV - A6]

La conditon (IV - A2) est nécessaire est suffisante pour que x soit p.v.p. de A. Son intervalle caractéristique J_x est fourni par (IV - A3)

Preuve

$$\lambda\left[x\,(\overline{A \otimes x})\right] \;_{v}\; \bar{\lambda}\,(A \otimes x) \;_{v}\; \bar{x}\,(A \otimes x) = 0$$

admet des pseudo solutions si

$$({}^{\dagger}e \otimes \bar{\alpha}\beta)\,({}^{\dagger}e \otimes \alpha\bar{\beta}) = 0 \qquad (\alpha = x(\overline{A \otimes x}) \;;\; \beta = A \otimes x)$$

$\alpha\beta = 0 \Longrightarrow \alpha\bar{\beta} = \alpha$ et $\beta\bar{\alpha} = \beta$ Donc, reste :

$({}^{\dagger}e \otimes \alpha).({}^{\dagger}e \otimes \beta)$ qui est (IV - A2)

La suite est sans changement.

.../...

B - Pseudo - Modules propres -

Soit $M_\lambda = \{ x \; ; \; x \in M_{n,1}(\mathcal{B}) \mid A \otimes x = \lambda x \}$

Si $M_\lambda \neq \{0\}$, M_λ sera appelé pseudo-module propre attaché à λ. Cette définition est justifiée par :

Proposition [IV - B1]

M_λ est un sous $\mathcal{B}$ - p.m de $M_{n,1}(\mathcal{B})$.

Proposition [IV - B2]

Soit $x = \bigvee_\omega x^\omega . \omega$ $\quad (\omega \in M_{n,1}\langle 2 \rangle)$

la décomposition disjonctive de $x \in M_{r,1}(\mathcal{B})$

Une condition nécessaire est suffisante pour que $x \in M_\lambda$ est que chaque composante : $x^\omega . \omega = \mu_\omega$ appartienne à M_λ,

Preuve

La partie directe est immédiate d'après la structure de pseudo-module .

Réciproquement, si $x \in M_\lambda$, on utilise un raisonnement analogue à celui du paragraphe (I - G) :

$$x^\omega . x = x^\omega . \omega = \mu_\omega \qquad \text{Donc}$$

$$A \otimes \mu_\omega = A \otimes (x^\omega . x) = A \otimes (x^\omega . \omega) = x^\omega A x = \lambda (x^\omega . \omega) = \lambda \mu_\omega$$

Cette remarquable propriété suggère de rechercher maintenant les éléments de M_λ du type $\mathcal{B} . \omega$ (où $\omega \in M_{n,1}\langle 2 \rangle - \{0\}$). La méthode est analogue à celle du [I - G5].

.../...

Recherche des éléments primitifs

Pour $\mathcal{S} \in \mathcal{B}$, $\omega \in M_{n,1}\langle 2\rangle - \{0\}$, considérons donc l'équation

$$A \otimes (\mathcal{S}\omega) = \lambda \mathcal{S}\omega \qquad \text{(IV - B1)}$$

En prenant $I_\omega = \{ i \; ; \; i \in [1,n] \mid \omega_i = 1 \}$ on a

$$\mathcal{S} \cdot \bigvee_{j=1}^{n} a_{ij} \; \omega_j = \lambda \mathcal{S} \qquad (i \in I_\omega) \quad \text{(IV - B2)}$$

$$\mathcal{S} \cdot \bigvee_{j=1}^{n} a_{ij} \; \omega_j = 0 \qquad (i \in \bar{I}_\omega) \quad \text{(IV - B3)}$$

Soit les conditions équivalentes

$$\mathcal{S} \ll \bar{\lambda} \oplus (A \otimes \omega)_i = \lambda \; (A \otimes \omega)_i \vee \bar{\lambda} \; (A \otimes \omega)_i \qquad (i \in I_\omega)$$

et $$\mathcal{S} \ll \overline{(A \odot \omega)_i} \qquad (i \in \bar{I}_\omega)$$

et la condition équivalente unique est

$$\mathcal{S} \ll \lambda \left[\bigwedge_{i \in [1,n]} (A \otimes \omega)_i^{\omega_i} \right] \vee \bar{\lambda} \left[\bigwedge_{i \in [1,n]} \overline{(A \otimes \omega)_i} \right] = \mathcal{S}_\omega^{\cdot}(\lambda)$$

Posant

$$\rho_\omega = \bigwedge_{i \in [1,n]} (A \otimes \omega)_i^{\omega_i} \qquad \text{(IV - B4)}$$

$$\beta_\omega = \bigwedge_{i \in [1,n]} \overline{(A \otimes \omega)_i} \qquad \text{(IV - B5)}$$

.../...

On voit que pour qu'il existe un vecteur propre de type $\mathcal{A} \cdot \omega$, il faut et il suffit que $\mathcal{A} \ll \mathcal{A}^*_\omega(\lambda)$. De la proposition [IV - B2] on tire :

Théorème [IV - B3]

M_λ est le sous $\mathbb{B}$- p.m. engendré par

$$\left\{ \mathcal{A}^*_\omega(\lambda) \cdot \omega \right\} \quad \omega \in M_{n,1}\langle 2 \rangle \qquad \text{(IV - B6)}$$

Corollaire

Comme $M_{n,1}\langle 2 \rangle$ est finie, M_λ contient un plus grand élément

$$X^*(\lambda) = \bigvee_\omega \mathcal{A}^*_\omega(\lambda) \cdot \omega$$

$$X^*(\lambda) = \lambda\left[\bigvee_\omega \alpha_\omega\right] \vee \bar{\lambda}\left[\bigvee_\omega \beta_\omega\right] = \lambda, i \vee \bar{\lambda}, j$$

observons que i et j étant indépendants de λ

$$X^*(1) = i \qquad X^*(0) = j$$

or $\quad A \otimes x = 0 \iff x \ll \langle A, 0 \rangle = j$

Par ailleurs $x \in M_1 \iff A \otimes x = x$ et ceci implique $x \ll A^n \otimes e$

Mais $\quad A^n \otimes e \in M_1$ (cf. [0 - 5]). Donc :

$$A^n \otimes e = i$$

... donc $\quad X^*(\lambda) = \lambda(A^n \otimes e) \vee \bar{\lambda}\langle A, 0 \rangle \qquad$ (IV - B7)

(proposition établie par d'autres moyens dans [R5])

.../...

Remarques :

On a par un calcul direct

$\overline{\beta_\omega} = {}^t e \otimes A \otimes \omega$ et donc

$$\bigvee_{\omega} ({}^t e \otimes A \otimes \omega) \cdot \omega = \langle A, 0 \rangle \qquad \omega \in M_{n,1}(2) - \{0\}$$

Pour ρ_ω , on a, avec les notations de (o-1).

$$\rho_\omega = (A \otimes \omega)^\omega \qquad (IV - B8)$$

et donc

$$\bigvee_{\omega} (A \otimes \omega)^\omega \cdot \omega = A^n \otimes e$$

On peut montrer, de plus, que l'on a

$$M_{\varphi \cap} M_{\mu} = M_{\varphi \vee \mu \cap} M_{\varphi \cdot \mu}$$

... ...

C - Les deux scalaires fondamentaux d'une matrice -

1) Si on observe que

$$\rho_\omega \cdot \beta_\omega = 0 \qquad (\omega \neq 0)$$

et donc que l'équation $\mathcal{A}^*_\omega(\lambda) = 0$ est toujours compatible, on voit que $(\forall \omega \neq 0)$, il existe un intervalle $[\beta_\omega, \overline{\rho_\omega}]$ de valeurs de λ auxquelles ne correspond aucun vecteur propre ω - primitif.

2) Plus intéressant est le problème suivant : A étant donnée, à quelle condition existe - t - il $\lambda \in \mathcal{B}$ non valeur propre de A ?

Pour cela il faut et il suffit que le système de n équations

$$\mathcal{A}^*_\omega(\lambda) = \lambda^{\rho_\omega} - \overline{\lambda}^{\beta_\omega} = 0$$

admette une solution en λ. Chaque équation est effectivement compatible d'après la remarque précédente et fournit

$$\beta_\omega \leqslant \lambda \leqslant \overline{\rho_\omega}$$

Pour que le système soit compatible il faut que

$$\bigvee_\omega \beta_\omega \leqslant \bigwedge_\omega \overline{\rho_\omega} \qquad \omega \in M_{n,1}(2) - \{0\}$$

(IV - C1)

Désignons pour plus de commodité par

$$\bigvee_{\omega'} u_\omega \qquad \text{la disjonction étendue à } \omega \in M_{n,1}(2) - \{0\}$$

... ...

Si la condition (IV - C1) est remplie, alors l'intervalle $\left[\bigvee_{\omega^*} \beta_\omega, \widetilde{\prod}_{\omega^*} \rho_\omega\right]$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}$ non valeur propre de A.

Alors, de

$$\bigvee_{\omega^*} \beta_\omega \cdot \omega = \langle A, 0 \rangle \quad , \text{ on tire}$$

$${}^t e \otimes \left[\bigvee_{\omega^*} \beta_\omega \cdot \omega\right] = \bigvee_{\omega^*} \beta_\omega = {}^t e \otimes \langle A, 0 \rangle \text{ et, de même}$$

$$\bigvee_{\omega^*} \rho_\omega = {}^t e \otimes A^n \otimes e \quad .$$

Posons $\omega(A) = {}^t e \otimes \langle A, 0 \rangle$ (IV - C2) et $\Omega(A) = \overline{{}^t e \otimes A^n \otimes e}$ (IV - C3)

La condition (IV - C1) s'écrit $\omega(A) \not\leqslant \Omega(A)$ (IV - C4)

Proposition (IV - C1)

Pour toute matrice A,

$$\Omega(A) \not\leqslant \omega(A) \qquad \text{(IV - C5) (*)}$$

Preuve

$$\overline{\omega} = \overline{{}^t e \otimes \overline{{}^t A \otimes e}} = \widetilde{\prod_i} \bigvee_j a_{ji}$$

$$\overline{\Omega} = \bigvee_{i,j} (A^n)_{i,j} \quad . \text{Or}$$

$$A^n_{i,j} = \bigvee_{i \in J_{n-1}} a_{i i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{n-1}, j}$$

où $i = (i_1, \ldots, i_{n-1})$ parcourt $J_{n-1} = [1,n]^{n-1}$

(*) Cette démonstration ébauchée par Rutherford dans [R4] a été ici mise en forme par le moyen des matrices pseudo- orthogonales.

.../...

Par ailleurs

$$\bar{\omega} = \bigvee_{k \in J_n} a_{k_1,1}\, a_{k_2,2} \cdots a_{k_n,n} \qquad k=(k_1,\ldots,k_n)$$

Soit $\mathcal{T}_k$ $(k=(k_1,\ldots,k_n))$ une conjonction arbitraire, mais fixée dans le développement de $\bar{\omega}$; attachons lui une matrice M de $M_n\langle 2\rangle$ de la façon suivante :

$$M_{i,j} = 1 \iff a_{ij} \text{ figure dans } \mathcal{T}_k.$$

Alors $\bigvee_i M_{i,j} = 1 \quad (\forall j)$ d'après la structure de $\mathcal{T}$ et M est p.o.g. [et donc également M^n (cf. [II - A2], et en particulier $M^n \neq 0$. Donc, d'après [I - B1]:

$$\left(\exists i \in [1,n]\right)\left(\exists p \in [1,n]\right) \; : M^p_{i,i} = 1$$

Or $$M^p_{i,i} = \bigvee_{\ell \in J_{p-1}} M_{i\ell_1} M_{\ell_1\ell_2} M_{\ell_{p-1},i} \qquad \left(\ell = (\ell_1,\ldots,\ell_{p-1})\right)$$

Sur $\langle 2\rangle$, ceci implique

$$\exists \ell : \quad M_{i\ell_1} = \ldots = M_{\ell_{p-1},i} = 1$$

C'est-à-dire encore

$$\left(\exists (\ell_1,\ldots,\ell_{p-1}) \in [1,n]^{p-1}\right) \quad \left(\exists i \in [1,n]\right) \text{ tels que}$$

$$a_{i\ell_1}, a_{\ell_1\ell_2}, \ldots a_{\ell_{p-1},i} \text{ figurent dans } \mathcal{T}.$$

.../...

Donc $\mathcal{T}_k \leqslant a_{i\,\ell_1} \cdots\cdots a_{\beta-1,\,i}$

Soit en répétant les termes autant de fois que nécessaire

$$\mathcal{T}_k \leqslant a_{i\ell_1}\ a_{\ell_1\ell_2} \cdots a_{\ell_{p-1}\,i}\ a_{i\ell_1} \cdots a_{\ell_{n-p-1},\,\ell_{n-p}}^{\leqslant (A^n)_{i,\,l_{n-p}}}$$

(prendre $\ell_{n-p} = i$ si $p = n$)

Donc $\mathcal{T}_k \leqslant (A^n)_{i,\,\ell_{n-p}} \ll \overline{\Omega} \qquad (\forall k)$

et donc

$$\bigvee_{k\ \in\ J_n} \mathcal{T}_k = \overline{\omega} \ll \overline{\Omega}$$

de la condition (IV - C4) et de la proposition précédente, on tire :

Proposition [IV - C2]

L'ensemble des $\lambda \in \mathbb{B}$ qui ne sont pas valeur propre de A est soit vide, soit réduit à un élément (Ω). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il ne soit pas vide est que

$$\omega(A) \ll \Omega(A)$$

Définition 1 :

Une matrice carrée A sera dite singulière si la condition (IV - C4) est réalisée

.../...

Définition 2 :

On dit que $\lambda \in \mathbb{B}$ est une valeur propre unaire de A si λ est valeur propre de A et s'il existe $x \in M_\lambda$ tel que son intervalle caractéristique J_x soit réduit à un élément

De (IV - A4), on déduit $\left\{ x \; ; \; x \in M_\lambda \text{ et } {}^t e \otimes x = 1 \right\}$ est la condition nécessaire et suffisante pour que λ soit unaire

Théorême [IV - C3]

L'ensemble des valeurs propres unaires de A est l'intervalle $\left[\overline{\omega}(A), \; \overline{\Omega}(A)\right]$. Il est réduit à un élément si et seulement si A est singulière.

Preuve

$$\left[x \in M_\lambda \; ; \; {}^t e \otimes x = 1 \right] \Longleftrightarrow {}^t e \otimes x^*(\lambda) = 1$$

et cette dernière condition s'écrit

$$\lambda \left[{}^t e \otimes A^n \otimes e \right]_v \; \overline{\lambda}^{\,t} e \otimes \langle A, 0 \rangle = 1$$

ou $\lambda \, \overline{\Omega}_v \, \overline{\lambda} \, \omega = 1 \Longleftrightarrow \lambda \, \Omega_v \, \overline{\lambda} \, \overline{\omega} = 0$

or $\Omega \, \overline{\omega} = 0$ (IV - C5) et l'ensemble des solutions est fourni par

$$\overline{\omega} \leqslant \lambda \leqslant \overline{\Omega}$$

Pour que cette intervalle soit réduit à un élément il faut et il suffit que $\omega = \Omega$, donc que A soit singulière.

.../...

Conséquences

1- Toute matrice booléenne admet au moins une valeur propre même si l'algèbre support $\mathbb{B} = \langle 2 \rangle$

2- Les propositions
- $\omega(A) = 0$
- A n'admet pas la valeur propre zéro
- A est p.o.g.

sont équivalentes.

En effet $\omega = 0 \iff {}^{t}\overline{A \otimes e} = 0 \iff {}^{t}A \otimes e = e.$

3- Les propositions
- $\Omega(A) = 1$
- A n'admet pas la valeur propre 1
- A est nilpotente

sont équivalentes.

$$\Omega = 1 \iff {}^{t}e \otimes A^{n} \otimes e = 0 \iff A^{n} = 0$$

4- Si $\mathbb{B} = \langle 2 \rangle$, une matrice sera singulière dans l'un et l'un seulement des deux cas suivants :

- A est nilpotente
- A est pseudo-orthogonale à gauche

5- Dans le cas particulier où $\mathbb{B} = \langle 2 \rangle$, et où $G = (X, \Gamma)$ désigne le graphe de matrice associée A, la propriété (IV - C5) s'interprête très simplement comme "si un graphe est sans circuit, il existe un sommet sans ascendants".

.../...

6- Voici quelques propriétés relatives aux scalaires ω et Ω :

a) on a évidemment $\Omega(A) = \Omega({}^{\dagger}A)$

b) du théorême du minimax, valable sur un treillis quelconque, on tire :

$$\bigwedge_i \bigvee_j a_{ji} \geqslant \bigvee_j \bigwedge_i a_{ji} \qquad (IV - C6)$$

or

$$\bigvee_j a_{ji} = ({}^{\dagger}A \otimes e)_i \quad \text{et} \quad \bigwedge_i z_i = \overline{\bigvee_i \overline{z_i}} = \overline{{}^{\dagger}e \otimes \bar{z}} \quad \text{Donc}$$

$$\bigwedge_i \bigvee_j a_{ji} = \overline{{}^{\dagger}e \otimes {}^{\dagger}\overline{A} \otimes e} = \bar{\omega}(A). \qquad (IV - C7)$$

Le membre de droite s'interprête pareillement

$$\bigwedge_i a_{ji} = \overline{\bigvee_i \overline{a_{ji}}} = (\bar{A} \otimes e)_j \quad \text{et donc}$$

$$\bigvee_j \bigwedge_i a_{ji} = {}^{\dagger}e \otimes \overline{\bar{A} \otimes e} = \omega({}^{\dagger}\bar{A}) \qquad (\text{Cf. } (IV - C7))$$

Donc, de (IV - C6) on tire

$$\omega({}^{\dagger}A) \cdot \omega(\bar{A}) = 0 \qquad (IV - C8)$$

C) De (IV - C2) et (IV - C3), on tire :

$$\Omega(A) \leqslant \Omega(A^2) \leqslant \ldots\ldots\ldots \leqslant \Omega(A^n) = \Omega(A^{n+1})$$

$$\omega(A) \leqslant \omega(A^2) \leqslant \ldots\ldots\ldots \leqslant \omega(A^n) = \omega(A^{n+1})$$

.../...

7) Des conséquences 2) et 3) ci-dessus on peut tirer des conclusions pour des matrices réelles à éléments non négatifs. Soit $\mathcal{M}_{n,p}$ l'ensemble de telle matrices. On définit, comme FROBENIUS([B 4]) :

$$h : \mathcal{M}_{n,p} \longrightarrow M_{n,p} \quad \langle 2 \rangle$$

$$\left[h(A)\right]_{ij} = 1 \iff a_{ij} > 0$$

$$\left[h(A)\right]_{ij} = 0 \iff a_{ij} = 0$$

h vérifie (cf. [B 4]) : $h(A \times B) = h(A) \otimes h(B)$ et
$h(\lambda A) = h(\lambda) \cdot h(A) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^+)$

Si donc, par exemple, $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors la condition

$$\left[h(A)\right]^n = 0$$

est nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$A \times X = \lambda X$$

ne possède pas de solution positive, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de valeur propre positive associée à un vecteur propre positif (i.e dont une composante au moins est positive). Pour tout système propre (λ, x) non négatif, on aurait en effet :

$$h(A \times X) = h(\lambda) \cdot h(X) = h(A) \otimes h(X)$$

et $\left[h(A)\right]^n = 0 \Rightarrow h(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$ (Cf. conséquence 3 ci-dessus)

.../...

On pourra vérifier ainsi que $(\forall a)\ (\forall b) > 0$, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} o & a & o \\ o & o & o \\ b & o & o \end{bmatrix}$$ n'admet pas de solution positive

au problème des valeurs propres. En effet

$$h(A) = \begin{bmatrix} o & 1 & o \\ o & o & o \\ 1 & o & o \end{bmatrix}$$ est la matrice

d'un graphe sans circuit. Donc $\left[h(A)\right]^3 = 0$

Proposition [IV - C4] (réciproque du IV - A2)

Si pour tout vecteur propre X de A, on a

$$A \bigcirc X = X$$

alors A est p.o.g.

Preuve

Utilisons l'expression de $X^*(\lambda)$ (IV - B7)

de $A \otimes X^*(\lambda) = X^*(\lambda)$ on déduit

$$A \otimes X^*(\lambda) = \lambda(A^{n+1} \otimes e) \oplus \lambda(A^n \otimes e)$$

$$\lambda(A^n \otimes e) \geq \bar{\lambda}\langle A, 0\rangle = \lambda(A^n \bigcirc e)$$

Donc $\lambda(A^n \otimes e) \geq \bar{\lambda}\langle A, 0\rangle$

pour toute valeur propre λ. Si $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre alors d'après la conséquence 2) du paragraphe précédent, le résultat est démontré. Sinon, prenant $\lambda = 0$, on a

$$\langle A, 0\rangle = 0 \Leftrightarrow A^+ \otimes \ldots$$

... ...

Proposition [IV - C5] (Réciproque de IV - A3)

Si pour tout vecteur propre X de A, on a

$$A \otimes X = 0$$

alors A est nilpotente.

Preuve

$$A \otimes X^* (\lambda) = 0 = \lambda(A^n \otimes e)$$

et on peut supposer $\lambda = 1$. (c.q.f.d.)

.../...

D - Conjuguaison pour les pseudo-modules propres :

Définition

On dit que M_λ est conjugué de M_μ si

$$ {}^t x \otimes A \otimes y = {}^t y \otimes A \otimes x = 0 \qquad (\forall x \in M_\lambda)\ (\forall y \in M_\mu) \quad \text{(IV-D1)} $$

On dit que M_λ est conjuguable s'il existe M_μ conjugué de M_λ.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de tous les pseudo-modules propres conjuguables de A.

Théorême [IV - D1]

Si A n'est pas singulière, un pseudo-module propre M_λ est conjuguable si et seulement si

$$ \lambda \ll \bar{\delta}(A) \qquad \text{où} \qquad \delta = \overline{{}^t e \otimes A \otimes A^n \otimes e} \quad \text{(IV-D2)} $$

M_λ est alors conjugué de tout élément de $\mathcal{C}$ qui vérifie

$$ \lambda . \mu \ll \Omega(A) \qquad \text{(IV - D3)} $$

Preuve

${}^t x \otimes A \otimes y = 0 \qquad (\forall x \in M_\lambda)\ (\forall y \in M_\mu)$ équivaut à

${}^t x^*(\lambda) \otimes A \otimes y^*(\mu) = 0$ soit

$$ {}^t\left[\lambda(A^n \otimes e)_v \overline{\lambda^t \overline{A \otimes e}}\right] . \mu . y^*(\mu) = {}^t\left[\lambda(A^n \otimes e)_v \overline{\lambda({}^t \overline{A \otimes e})}\right] . \mu . (A^n \otimes e) $$

.../...

En posant $\alpha = A^n \otimes e \qquad \beta = {}^t\overline{A} \otimes e$, on a

$${}^t x^*(\lambda) \otimes A \otimes y^*(\mu) = \mu\left[\lambda({}^t\alpha \otimes \alpha) \underset{v}{.} \bar{\lambda}({}^t\beta \otimes \alpha)\right]$$

or $\quad {}^t\alpha \otimes \alpha = {}^t e \otimes \alpha = \bar{\Omega}(A)$

et $\quad {}^t\beta \otimes \alpha = {}^t e \otimes \alpha\beta = \delta(A)$

En échangeant les rôles de λ et μ on obtient les deux conditions

$$\begin{cases} \lambda\, \mu\, \bar{\Omega}(A) \underset{v}{.} \bar{\lambda}\mu\, \delta(A) = 0 \\ \lambda\, \mu\, \bar{\Omega}(A) \underset{v}{.} \lambda\bar{\mu}\, \delta(A) = 0 \end{cases}$$

Soit

$$\lambda\mu\, \bar{\Omega}(A) \underset{v}{.} \delta(A)\ (\bar{\lambda}\,\mu \underset{v}{.} \lambda\,\bar{\mu}) = 0 \qquad (IV - D4)$$

Pour λ fixé, la condition pour qu'il existe μ satisfaisant (IV - D4) est

$$\lambda\, \delta\, \bar{\Omega} = 0 \qquad (IV - D5)$$

or $\quad ({}^t e \otimes \alpha)\ ({}^t e \otimes \beta) \gg {}^t e \otimes \alpha\beta = \delta(A)$

$$\bar{\Omega}(A)\ .\ \omega(A) \gg \delta(A) \Longrightarrow \bar{\Omega} \gg \delta \qquad (IV - D6)$$

et donc (IV - D5) devient

$$\lambda\ .\ \delta = 0 \qquad (IV - D7)$$

Donc $\mathcal{C} = \{M_\lambda\ ;\ \lambda \ll \bar{\delta}(A)\}$ (Il n'y a en effet aucune valeur de λ à exclure, puisque A n'est pas singulière). Si M_μ appartient aussi à $\mathcal{C}$, alors la condition (IV - D4) fournit

$$\lambda\,\mu \ll \bar{\Omega}(A) \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

Remarque 1 : Si A est singulière, alors $\omega = \Omega$ et $\delta = 0$. La

.../...

condition (IV - D4) devient alors

$$\lambda \mu \bar{\Omega}(A) = 0$$

Soit $\mu \langle \bar{\lambda}_v \Omega$ et $(\forall \lambda)\ \lambda \in B,\ \lambda \neq \Omega$ il existe une solution en elle-même différente de Ω, sauf le cas où :

$$\bar{\lambda}_v \Omega = \Omega = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \text{ et } \Omega = 0$$

En résumé, si A est singulière et $\Omega \neq 0$, M_λ est un pseudo-module conjuguable pour $\lambda \in B - \{\Omega\}$. Si A est singulière et $\Omega = 0$, alors M_λ est conjuguable si $\lambda \in B - \{0,1\}$.

Remarque 2

La définition précédente montre que pour qu'un pseudo-module propre M_λ soit son propre conjugué, il faut que tous ses éléments soient isotropes (cf. [III - C1]), et d'après (IV - D4) que

$$\lambda \langle \Omega(A) \langle \bar{\lambda}(A)$$

Dans ce cas $\lambda(A^\cap \otimes e) = 0$ et donc

$$x^*(\lambda) = \bar{\lambda} \cdot \langle A,0\rangle \langle \langle A,\Omega\rangle$$

Donc

$$(\forall x \in M_\lambda) \qquad A \otimes x = 0$$

Si A est p.o.g., il n'existe donc pas de tels pseudo-modules propres isotropes. Dans le cas où A n'est pas p.o.g. ceux-ci sont simplement les intervalles

$$J_\lambda = [0, \bar{\lambda}\langle A,0\rangle] \qquad \text{où } \lambda \geq \Omega(A)\ (\lambda \neq 1)$$

V - Méthodes booléennes en Algèbre de Post

Rappelons ici que la structure d'Algèbre de Post n'a pas été établie par Post, mais par ROSENBLOOM [R1] pour donner un support algébrique à la logique à n valeurs de Post, comme l'Algèbre de Boole l'est pour la logique binaire (une Algèbre de Post 2 - valente est d'ailleurs une Algèbre de Boole).

L'axiomatique de Rosenbloom était néanmoins si obscure que pendant plus de quinze ans l'étude des Algèbres de Post fut abandonnée. Elle fut reprise dans un brillant article d'Epstein [E1] qui donna une axiomatique simple et commode dont il démontra (ce fut son grand mérite!) l'équivalence à celle de Rosenbloom.

Dans ce chapitre on se propose d'appliquer un certain nombre de propriétés établies précédemment à une structure(dénommée sous-diagonale dans ce qui suit) qui est un treillis distributif construit de façon simple à partir de $\mathbb{B}$, contenu dans $\mathbb{B}^{r-1}$ et contenant $\mathbb{B}$, à un isomorphisme près. La définition par la voie purement booléenne de ce treillis permet d'étendre simplement la plupart des propriétés matricielles booléennes (notamment à partir de la résiduation). L'intérêt de cette structure de sous-diagonale est que celle-ci est une Algèbre de Post (et de LUKASIEWICZ) et, que par ailleurs, toute Algèbre de Post est isomorphe à une certaine sous-diagonale : le théorême de représentation [V - B3] est essentiel à cet égard.

Il s'agit donc ici d'une approche purement booléenne des Algèbres de Post. Fidèle à ce principe, nous avons, le plus souvent, donné les propriétés en termes de sous-diagonale, sans les transcrire chaque fois, en termes postiens.

.../...

A - Sous-diagonale de $\mathbb{B}^{r-1}$ $(r \in \mathbb{N} \; ; \; r \geqslant 2)$

Soit $\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B}) = \{(x_1, \ldots, x_{r-1}) \in \mathbb{B}^{r-1} \mid x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots\ldots \leqslant x_{r-1}\}$

$\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$ sera appelée sous-diagonale de $\mathbb{B}^{r-1}$

Proposition [V - A1]

$\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$ est un sous-treillis distributif borné de $\mathbb{B}^{r-1}$ qui est aussi un quasi-pavé.

Preuve

Il est immédiat que $\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$ est un sous-treillis de $\mathbb{B}^{r-1}$. $\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$ est, par ailleurs, un pavoïde puisque, si

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}) \in \Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$$

$$\{\omega \; ; \; \omega \in \mathbb{B} \mid (x_1, \ldots, x_{i-1}, \omega, x_{i+1}, \ldots, x_{r-1}) \in \Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})\} =$$

$$\left[x_{i-1}, x_{i+1}\right]$$

Enfin il est cylindrique, car avec les définitions du (III - A)

$$A^i = \mathbb{B} \qquad (\forall i)$$

Proposition [V - A2]

L'ensemble des éléments complémentés de $\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$ est une sous - algèbre de $\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$, isomorphe à $\mathbb{B}$

.../...

Preuve-

Soient $x = (x_1, \ldots, x_{r-1})$ et $\overline{x} = (y_1, \ldots, y_{r-1})$.

Alors

$$x_k \vee y_k = 1 \quad \text{et} \quad x_k \cdot y_k = 0 \quad \text{impliquent}$$

$$x_k = \overline{y_k}$$

Mais $x_1 \ll x_2 \ll \ldots \ll x_{r-1}$, implique $\overline{x_1} \gg \overline{x_2} \gg \ldots \gg \overline{x_{r-1}}$

Donc $y_1 \gg y_2 \gg \ldots \gg y_{r-1}$ et comme $\overline{x}$ appartient à $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$

$$y_1 = \ldots = y_{r-1} \quad \text{et} \quad x_1 = \ldots = x_{r-1}.$$

Donc tout élément complémenté appartient à la diagonale de $\mathcal{B}^{r-1}$. Réciproquement soit $(x, x, \ldots, x)$ un élément de cette diagonale. Il est complément de $(\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x})$.

L'ensemble des éléments complémentés coïncide donc avec la diagonale δ de $\mathcal{B}^{r-1}$. L'application φ :

$$\varphi : B \longrightarrow \delta \qquad x \longrightarrow (x, x, x, \ldots, x)$$

est un isomorphisme d'algèbres de Boole.

Nous identifierons dans la suite x et $(x, x, \ldots, x)$ et on dira dans la suite que $x \in \Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$ est "booléen" (*) s'il est complémenté.

(*) "Moisil dit Chrysippien"

.../...

Proposition [V - A3]

Soient $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, pour $k \in [1, r-1]$, (r-1) intervalles de $\mathbb{B}$ et $I = I_{1x \cdots x} I_{r-1}$.

Alors $J = I \cap \Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$ est, s'il n'est pas vide, un sous treillis borné de $\mathbb{B}^{r-1}$, qui est aussi un quasi-pavé.

Preuve

I est un produit d'intervalle, donc un sous treillis et un quasi pavé ; ceci, compte tenu de la proposition [V - A1] assure le résultat, si J n'est pas vide.

Nous allons étudier maintenant la structure de J et les conditions auxquelles il n'est pas vide, dont nous aurons un constant besoin dans la suite.

Recherchons donc sur $\mathbb{B}$ les solutions du système

$$\begin{cases} x_k \leqslant x_{k+1} & k \in [1, r-2] \\ \alpha_k \leqslant x_k \leqslant \beta_k & k \in [1, r-1] \end{cases}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{cases} \bigvee_{k=1}^{r-2} x_k \overline{x_{k+1}} = 0 \\ \bigvee_{k=1}^{r-1} \alpha_k \overline{x_k} \vee x_k \overline{\beta_k} = 0 \end{cases}$$

On applique la méthode des éliminations successives en commençant par l'inconnue x_1.

$$x_1 (\overline{x_2} \vee \overline{\beta_1}) \vee \overline{x_1} \alpha_1 \vee \left[\bigvee_{k \geqslant 2}^{r-2} x_k \overline{x_{k+1}} \right] \vee \left[\bigvee_{k=2}^{r-1} \alpha_k \overline{x_k} \vee x_k \overline{\beta_k} \right] = 0$$

.../...

posant $t_j = \bigvee_{k \geqslant j}^{r-2} x_k \, \overline{x_{k+1}}$ et $u_j = \bigvee_{k=J}^{r-1} (\alpha_k \, \overline{x_k} \vee x_k \, \overline{\beta_k})$

il vient $t_2 \vee u_2 \vee \alpha_1 \, \overline{x_2} = 0$ et $\alpha_1 \leqslant \beta_1$

Soit $x_2 \, (\overline{x_3} \vee \overline{\beta_2}) \vee \overline{x_2} \, (\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee t_3 \vee u_3 = 0$

et $t_3 \vee u_3 \vee \overline{x_3} \, (\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \alpha_1 \, \overline{\beta_2} = 0$

qui exige donc $\alpha_1 \leqslant \beta_2$. Si, donc on prend pour hypothèse de récurrence que les conditions obtenues à l'étape k sont

$$\begin{cases} \alpha_i \leqslant \beta_j \quad (i \leqslant j \leqslant k-1) & (V - A1) \\ t_k \vee u_k \vee \overline{x_k} \, (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_{k-1}) = 0 & (V - A2) \end{cases}$$

Il vient $x_k \, (\overline{\beta_k} \vee \overline{x_{k+1}}) \vee \overline{x_k} \, (\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_k) \vee t_{k+1} \vee u_{k+1} = 0$

qui implique

$$t_{k+1} \vee u_{k+1} \vee \overline{x_{k+1}} \, (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_k) \vee \overline{\beta_k} \, (\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_k) = 0$$

Soit

$$\begin{cases} \alpha_i \leqslant \beta_j \qquad i \leqslant j \leqslant k \\ t_{k+1} \vee u_{k+1} \vee \overline{x_k} \, (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_{k-1}) = 0 \end{cases}$$

La récurrence est donc prouvée. La méthode des éliminations successives fournit par ailleurs à l'étape k :

$$\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_k \leqslant x_k \leqslant \beta_k \, x_{k+1}$$

.../...

Théorême [V - A4]

J n'est pas vide si et seulement si

$$\alpha_i \lessdot \beta_j \qquad (i \leqslant j) \qquad (V - A3)$$

Alors les éléments $(x_1, \ldots, x_{r-1})$ de J sont donnés par :

$$\bigvee_{j \leqslant k} \alpha_j \leqslant x_k \leqslant \beta_k \cdot x_{k+1} \qquad (k \in [1, r-2])$$

$$\bigvee_{j \leqslant r-1} \alpha_j \lessdot x_{r-1} \lessdot \beta_{r-1} \qquad (V - A4)$$

Remarque :

Si on prend $\alpha_j = 0$ $(\forall i)$ les conditions (V - A3) sont remplies. La borne supérieure $\hat{X}$ de J (appartenant à J) est donc définie par

$$(\hat{X})_k = \overset{\frown}{\prod_{j \geqslant k}} \beta_j \qquad (V - A5)$$

La proposition [V - A4] va permettre de caractériser les intervalles de $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$.

Théorême [V - A5]

L'intersection de $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$ et d'un intervalle de $\mathcal{B}^{r-1}$ est, si elle n'est pas vide, un intervalle de $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$.

Preuve

Soit $(\lambda, \gamma) \in \left[\mathcal{B}^{(r-1)}\right]^2 \quad : \lambda \leqslant \gamma$

.../...

Si on suppose que $[\lambda, \nu] \cap \Delta^{(r-1)}(B) \neq \emptyset$, alors les conditions (V - A3) sont remplies et les solutions données dans $\Lambda^{(r-1)}(B)$ par (V - A4). Prenons λ^* et ν^* définis par

$$(\lambda^*)_k = \bigvee_{j \leqslant k} \lambda_j \qquad (\nu^*)_k = \widetilde{\bigwedge_{j \geqslant k}} \nu_j \qquad \text{(V - A6)}$$

$(\lambda^*, \nu^*) \in \left[\Delta^{(r-1)}(B)\right]^2$ et $\lambda^* \leqslant \nu^*$ d'après (V - A3). L'intersection de $[\lambda^*, \nu^*]$ et de $\Delta^{(r-1)}(B)$ est fournie dans $B^{(r-1)}$ par

$$\begin{cases} \bigvee_{j \leqslant k} \lambda_j^* \leqslant x_k \leqslant \nu_k^* \cdot x_{k+1} & k \in [1, r-2] \\ \bigvee_{j \leqslant r-1} \lambda_j^* \leqslant x_{r-1} \leqslant \nu_{r-1}^* & \end{cases} \qquad \text{(V - A7)}$$

Mais $\bigvee_{j \leqslant k} \lambda_j^* = \bigvee_{j \leqslant k} \cdot \bigvee_{\ell \leqslant j} \lambda_\ell = \bigvee_{j \leqslant k} \lambda_j$

et

$$\nu_k^* \, x_{k+1} = \nu_{r-1} \cdot \nu_{r-2} \cdots \nu_{k+1} \cdot \nu_k \, x_{k+1}$$

et $\quad x_k \leqslant \nu_{r-1} \cdot \nu_{r-2} \cdots \nu_{k+1} \cdot \nu_k \cdot x_{k+1} \leqslant \nu_{r-1} \cdot \cdots \cdot \nu_k$

implique

$$(x_k) \cdot (\nu_{2-1} \cdot \nu_{r-2} \cdots \nu_k) = x_k$$

Alors

$$x_{k-1} \leqslant \nu_{k-1}^* \cdot x_k = \nu_{r-1} \cdots \nu_k \cdot \nu_{k-1} \, x_k$$

équivaut à

$$x_{k-1} \leqslant (\nu_{r-1} \cdots \nu_k \, x_k) \cdot (\nu_{k-1}) = \nu_{k-1} \, x_k$$

.../...

Donc l'ensemble des formules (V - A7) équivaut à (V - A4).

et : $[\lambda, \nu]_{\wedge} \quad \Delta^{(r-1)}(\mathbb{B}) = [\lambda^*, \nu^*]$

Remarque

On voit donc (la réciproque étant triviale) qu'une partie A de $\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$ est un intervalle si et seulement si elle est l'intersection avec $\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$ d'un intervalle de $\mathbb{B}^{r-1}$. On pourra penser appliquer ceci pour structurer $\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$ en espace topologique à partir de la topologie (produit) d'intervalles définie sur $\mathbb{B}^{(r-1)}$ (cf. BIRKHOFF [B4]).

Théorême [V - A6]

$\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$ est résidué (comme treillis)

Preuve

Nous ferons la démonstration pour le résidu à gauche.

Soit donc

$(\beta_1, \ldots \beta_{r-1}) = \beta$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}) = \alpha$ deux éléments de $\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$. Soit alors l'équation (V - A8)

$u \cdot \alpha \leqslant \beta$ sur $\Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$. Elle équivaut à

$u_i \cdot \alpha_i \leqslant \beta_i \iff u_i \leqslant \beta_i \vee \overline{\alpha_i}$ et $u \in \Delta^{(r-1)}(\mathbb{B})$

Donc $u_k \leqslant \bigwedge_{j \geqslant k} (\beta_j \vee \overline{\alpha_j}) = u'_k$

.../...

Donc l'équation (V - A8) possède une plus grande solution u' notée

$$u' = \langle \alpha, \beta \rangle$$

En particulier, si $\beta = 0$, u est la négation (cf. [C3]) de α :

$$\alpha' = \langle \alpha, 0 \rangle = (\overline{\alpha_{r-1}}, \overline{\alpha_{r-1}}, \ldots, \overline{\alpha_{r-1}})$$

Le théorême de Lagrange donné en ([I - F1]) pour les matrices colonnes s'écrit ici en Algèbres Produit

$$(\forall x \in \mathbb{B}^{r-1}) \qquad x = \bigvee_{\alpha} x^{\alpha} . \alpha \qquad \alpha \in \langle 2 \rangle^{r-1}$$

Si donc on désigne par $\langle r \rangle$ le sous treillis $\Delta^{(r-1)} \langle 2 \rangle$ (à r éléments), de $\Delta^{(r-1)} (\mathbb{B})$, on a

$$\omega_o = 0 \qquad (\omega_i)_j = 1 \qquad j \geqslant r-1$$

$$(\omega_i)_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant r - i - 1$$

On notera $\omega_{r-1} = 1$ (par l'isomorphisme [V - A2]) .

Remarquons que si $x \in \Delta^{(r-1)} (\mathbb{B})$ et $\alpha \in \langle 2 \rangle^{r-1}$

alors $x^{\alpha} \neq 0 \iff \alpha \in \langle r \rangle$

En effet $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \ldots . x_{r-1}^{\alpha_{r-1}}$

et s'il existe $j > i$ tel que $\alpha_j = 0$ et $\alpha_i = 1$ alors

$$(x_i)^1 . (x_j)^0 = 0$$

Le théorême de Lagrange s'écrit donc dans $\Delta^{(r-1)} (\mathbb{B})$:

$$x = \bigvee_{\alpha} x^{\alpha} . \alpha \qquad (\alpha \in \langle r \rangle)$$

qui prend la forme plus simple

.../...

$$x = \bigvee_{0}^{r-1} x^i \cdot \omega_i \qquad (V - A9)$$

et les conditions (I - F2) fournissent :

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i = 1 \qquad x^i \cdot x^j = 0 \quad (i \neq j) \qquad (V - A10)$$

A tout élément $x = (x_1, \ldots, x_{r-1})$ de $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$ on fera donc correspondre l'élément $(x^\circ, \ldots, x^{r-1})$ de $\mathcal{B}^r$, ensemble des composantes disjonctives de x, appelées ici <u>composantes postiennes</u> de x. On notera

$$h(x) = (x^\circ, \ldots, x^{r-1}) \qquad (V - A11)$$

Les composantes postiennes de x sont uniques d'après l'unicité de la décomposition disjonctive. Les relations entre composantes booléennes et postiennes sont fournies, dans un sens, par (V - A9), qui donne :

$$\varphi \quad \begin{cases} x^\circ = \overline{x_{r-1}} \\ x^k = \overline{x_1} \ldots \overline{x_{r-k-1}} \cdot x_{r-k} \ldots x_{r-1} = x_{r-k} \cdot \overline{x_{r-k-1}} \\ \qquad (1 \leqslant k \leqslant r-2) \\ x^{r-1} = x_1 \end{cases} \qquad (V - A12)$$

Dans l'autre sens, l'ensemble des formules (V - A12) se résout suivant

$$\psi \quad \left\{ x_j = \bigvee_{k \geqslant r-j} x^k \right. \qquad 1 \leqslant k \leqslant r-1 \qquad (V - A13)$$

(en particulier $x_{r-1} = \overline{x^\circ}$)

.../...

Soit donc $L_r(\mathcal{B})$ le sous ensemble de $\mathcal{B}^r$ des éléments $(x^0, x^1, \ldots, x^{r-1})$ tels que

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i = 1 \qquad ; \qquad x^i \cdot x^j = 0 \quad (i \neq j)$$

On a montré :

Théorème [V - A7]

Ψ est une bijection de $L_r(\mathcal{B})$ sur $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$ dont φ est la bijection inverse.

Remarque :

$x \in \Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$ est booléen si et seulement si

$$h(x) = (\bar{x}, 0, \ldots, x)$$

(en utilisant l'identification du [V - A2])

Théorème [V - A8] (fonctions caractéristiques)

Soit E un ensemble.

$\Delta^{(r-1)}(P(E))$ est isomorphe, comme treillis, à $\langle r \rangle^E$.

Preuve

$\langle r \rangle^E$ est muni de la structure de treillis "image".
Soit $X = (X_1, \ldots, X_{r-1}) \in \Delta_o^{(r-1)}\left[P(E)\right]$ à qui l'on fait correspondre bijectivement $(X^1, \ldots, X^{r-1}) \in L_r(P(E))$ par des formules analogues à (V - A12) :

.../...

$$\begin{cases} X^{\circ} = C\,(X_{r-1}) \\ X^{k} = X_{r-k} \cap C\left[X_{r-k-1}\right] \qquad 1 \leqslant k \leqslant r-2 \qquad (V\text{-}A14) \\ X^{r-1} = X_{1} \end{cases}$$

L'ensemble des X^k $(0 \leqslant k \leqslant r-1)$ est une partition de E. Alors, on définit l'application φ_X de E dans (r) par.

$$\varphi_X(x) = \omega_k \Longleftrightarrow x \in X^k \qquad (V - A15)$$

et soit $h(X) = \varphi_X$. h est l'isomorphisme cherché. h est injective d'après (V - A15), surjective car pour $\varphi \in (r)^E$, on définit :

$T^k = \{ x \in E \mid \varphi(x) = \omega_k \}$ et les T_i sont donnés en fonction des T^k par des relations analogues à (V - A13) :

$$T_j = \bigcup_{k \geqslant r-j} T^k \qquad (V - A16)$$

Alors $\varphi = h(T)$ où $T = (T_1, \ldots\ldots, T_{r-1})$

Par ailleurs

$\left[h(X \cup Y)\right](x) = \omega_k \Longleftrightarrow x \in (X \cup Y)^k$. En appliquant (V - A14), on trouve pour $k \in [1, r-2]$

$$(X \cup Y)^k = \left[X^k \cap C(Y_{r-k-1})\right] \cup \left[Y^k \cap C(X_{r-k-1})\right] \qquad (V - A17)$$

Mais $\left[h(X) \vee h(Y)\right](x) = \omega_k \Longleftrightarrow$

$\{ [h(X)](x) = \omega_k$ et $[h(Y)](x) \leqslant \omega_k \}$ ou bien

$\{ [h(X)](x) \leqslant \omega_k$ et $[h(Y)](x) = \omega_k \}$

... ...

Soit $\left\{ x \in X^k \quad \text{et} \quad x \in \bigcup_0^k Y^j = C\left[\bigcup_{k+1}^{r-1} Y^j\right] = C\left[Y_{r-k-1}\right] \right\}$

(d'après (V - A14) et (V - A16))

ou bien de la même façon

$$\left\{ x \in Y^k \cap C\left[X_{r-k-1}\right] \right\}$$

En comparant avec (V - A17) on trouve

$$\left[h(X \cup Y)\right](x) = \omega_k \Longleftrightarrow \left[h(X) \vee h(Y)\right](x) = \omega_k \quad (k \in [1, r-2])$$

On le démontre aussi pour k = 0 et k = r-1, ainsi que pour la conjonction (c.q.f.d.).

Cette proposition fournit une démonstration constructive (d'isomorphisme) du théorême d'Epstein [E1]

En particulier, si $\mathcal{B}$ est complète et atomique, $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$ est isomorphe, comme treillis à $\langle r \rangle^{\Omega}$ où Ω est l'ensemble des atomes de $\mathcal{B}$. Dans le cas r = 2, enfin on retrouve le théorême bien connu des fonctions caractéristiques.

. . . . . .

B - Sous-diagonales et Algèbres de Post -

Dans $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$, on définit les projections

$$\sigma_i(x) = x_i \qquad i \in [1, r-1]$$

et l'application δ :

$$\delta(x) = (\overline{x_{r-1}}, \overline{x_{r-2}}, \ldots, \overline{x_1})$$

δ est une dualité involutive de treillis.

Alors $(\Delta^{r-1}(\mathcal{B}), V, ., 0, 1, \sigma, \delta)$ est une algèbre de LUKASIEWICZ r-valente . Moisil a d'ailleurs démontré l'important théorême ([M7]) que l'on peut reformuler comme suit :

Théorême V - B1

Toute algèbre de Lukasiewicz r-valente est isomorphe (comme treillis) à une partie de la sous-diagonale de $\mathcal{B}^{r-1}$, où $\mathcal{B}$ est l'ensemble de ses éléments complémentés.

Une algèbre de Lukasiewicz n'est pas donnée, à un isomorphisme près, par l'ensemble de ses éléments complémentés. Nous verrons maintenant qu'il n'en est pas de même pour les Algèbres de Post.

Le théorême de représentation que nous donnons ([V - B3]) nous semble être dans le prolongement du travail de Post lui-même, l'axiomatique de Rosenbloom ayant, à notre avis, contribué à obscurcir la structure postienne, et il faut savoir gré à Epstein (cf.[E1]) (auquel nous ferons fréquemment référence), d'avoir redonné vie à l'étude des Algèbres de Post en leur fournissant une axiomatique élégante et commode.

.../...

Théorême [V - B2]

$\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$ est une algèbre de Post de type (r).

Preuve

On prend, en effet, pour retrouver les notations de [E 1]

$$C_i(x) = x^i \qquad \text{et} \qquad e_i = \omega_i$$

La démonstration est immédiate et fournit une image simple des éléments ω_i. Le résultat qui suit est fondamental pour la représentation des Algèbres de Post.

Théorême [V - B3]

Toute Algèbre de Post P de type r est isomorphe comme treillis à la sous-diagonale de $\mathcal{B}^{(r-1)}$ où $\mathcal{B}$ est l'ensemble de ses éléments complémentés.

Preuve

On définit l'application h

$$h : P \longrightarrow L_r(\mathcal{B})$$

$$x \longrightarrow h(x) = (x^0, x^1, \ldots, x^{r-1})$$

Il est bien connu que cette application est une bijective (cf. [E1]). Soit alors Ψ de $L_r(\mathcal{B})$ dans $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$:

$$(x^0, x^1, \ldots, x^{r-1}) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_{r-1})$$

$\sigma = \Psi \circ h$ est d'après (V - A7) une bijection.

.../...

Les résultats (théorême [7], [9] et [11] de [E1] montrent que σ est un isomorphisme de treillis(*). Il suffit de poser

$$x_i = D_{r-i}(x) \qquad \text{dans } [E1]$$

On en déduira, à l'aide du théorême de Stone, la représentation ensembliste :

Théorême [V - B4]

Pour toute algèbre de Post, il existe un ensemble E et un corps F, de parties de E tels que P soit isomorphe, comme treillis, à $\Delta^{(r-1)}(F)$.

Ce théorême permettra par exemple de retrouver immédiatement que, dans le cas fini, le nombre d'éléments de Post de la forme r^p (pour un calcul combinatoire élémentaire (*). Nous nous proposons de développer dans un autre travail les conséquences du théorême V - B3 .

Les notions de sous-Algèbre de Post (resp. d'homomorphisme) s'introduiront, par exemple, en considérant la sous-diagonale associée à une sous-algèbre de $\mathcal{B}$, (resp. le prolongement d'un homomorphisme de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$).

Conformément à ce que nous avions annoncé en introduction, nous résoudrons maintenant un certain nombre de problèmes matriciels dans $\Delta^{(n-1)}(\mathcal{B})$. La traduction en termes postiens (non explicitée le plus souvent) se fait par (V - A12 et 13).

(*) Voir aussi la démonstration du [V - A8]

(**) A partir du fait, que si $r = 3$, $\Delta^{(2)}(P'(E)) = \mathcal{C}$ et il est bien connu que si $|E| = p$, $|\mathcal{C}| = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \, 2^k = 3^p$.

.../...

C - Problèmes matriciels -

Soit $M_{n,p}\ (\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B}))$ l'ensemble des matrices d'ordre (n,p) sur le treillis $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$.

Théorème [V - C1]

$M_{n,p}\ (\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B}))$ est isomorphe, comme treillis, à

$$\Delta^{(r-1)}\left[M_{n,p}(\mathcal{B})\right]$$

Preuve

Soit $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{n,p}\ (\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B}))$

$$a_{ij} = \left(a_{ij}^{(1)}, \quad , a_{ij}^{(r-1)}\right)$$

Posons $\tilde{A} = \left(A^{(1)}, \quad , A^{(r-1)}\right)$ où $\left[A^{(s)}\right]_{ij} = a_{ij}^{(s)}$

$(s \in [1,r-1])$

$\tilde{A}$ appartient à $\Delta^{(r-1)}\left(M_{n,p}(\mathcal{B})\right)$ et l'application $A \longrightarrow \tilde{A}$ est bijective. C'est un isomorphisme car

$$A \vee B = C \Longleftrightarrow a_{ij} \vee b_{ij} = c_{ij} \Longleftrightarrow a_{ij}^{(s)} \vee b_{ij}^{(s)} = c_{ij}^{(s)}$$

$$\Longleftrightarrow A^{(s)} \vee B^{(s)} = C^{(s)} \Longleftrightarrow \tilde{A} \vee \tilde{B} = \tilde{C}$$

Démonstration identique pour la conjonction.

Si l'on pose de plus

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \left(A^{(1)} \otimes B^{(1)}, \ldots\ldots\ldots, A^{(r-1)} \otimes B^{(r-1)}\right)$$

.../...

Alors l'application $A \longrightarrow \tilde{A}$ est également compatible avec les produits matriciels, puisque

$$C = A \otimes B \Longleftrightarrow C_{ij} = \bigvee_k a_{ik}\, b_{kj} \Longleftrightarrow C_{ij}^{(s)} = \bigvee_k a_{ik}^{(s)} \cdot b_{kj}^{(s)}$$

$$\Longleftrightarrow C^{(s)} = A^{(s)} \otimes B^{(s)} \qquad \tilde{C} = \tilde{A} \otimes \tilde{B} = \widetilde{A \otimes B}$$

$M_{n,p}\,(\Delta^{(r-1)}(B))$ possède donc elle-même la structure de sous diagonale. On identifiera dans la suite A et $\tilde{A}$.

Cet isomomorphisme a d'importantes applications : il permet de réduire les problèmes matriciels dans $\Delta^{(r-1)}(B)$ (c'est-à-dire en Algèbre de Post) à des problèmes matriciels booléens. Les exemples qui vont suivre n'en constituent qu'une illustration partielle.

Théorême [V - C2]

$$A \in M_{m,n}\,(\Delta^{(r-1)}(B)) \;;\; B \in M_{m,p}\,\left(\Delta^{(r-1)}(B)\right)$$

Alors l'ensemble des X ($X \in M_{n,p}\,(\Delta^{(r-1)}(B))$ tels que :

$$A \otimes X \leqslant B \qquad (V - C1)$$

contient un plus grand élément $\hat{X}$.

Preuve

L'inéquation (V - C1) est équivalente au système des (r-1) équations matricielles booléennes :

$$A_i \otimes X_i \leqslant B_i \qquad (V - C2)$$

où l'on exige $X_i \leqslant X_{i+1}$, sachant que :

$$A_i \leqslant A_{i+1} \quad (\forall i) \;;\quad B_i \leqslant B_{i+1} \quad (\forall i)$$

.../...

or (V - C2) équivaut à :

$$X_i \leqslant \langle A_i, B_i \rangle$$

et d'après (V - A7) ceci équivaut à :

$$X_i \leqslant \widetilde{\bigvee_{k \geqslant i}} \langle A_k, B_k \rangle$$

Conclusion : si l'on pose

$$\hat{X} = \langle A, B \rangle$$

alors

$$\boxed{\langle A, B \rangle_i = \widetilde{\bigvee_{k \geqslant i}} \langle A_k, B_k \rangle} \qquad (V - C3)$$

Corollaire :

L'ensemble des solutions de (V - C1) est l'intervalle

$$\left[0, \langle A, B \rangle\right]$$

et de même

Théorème [V - C3]

$\left(M_n\left(\Delta^{(r-1)}(B)\right), \vee, \otimes\right)$ est un gerbier résidué.

Théorème [V - C4]

Une matrice carrée de $M_n(\Delta^{(r-1)}(B))$ est inversible si et seulement si elle est "booléenne" (cf. [V - A2]) et orthogonale.

.../...

Preuve

$$A \in M_n\left(\Delta^{(r-1)}(B)\right)$$

$A \otimes B = I$ équivaut à

$$A_i \otimes B_i = I_i = I \quad (V - C4) \qquad (\forall i \in [1, r-1])$$

et

$$A_i \ll A_{i+1} \quad ; \quad B_i \ll B_{i+1}$$

Or (V-C4) implique que A_i est inversible dans $M_n(B)$, donc orthogonale. Mais comme une matrice inversible est en particulier unitaire et que deux matrices unitaires distinctes sont incomparables (II - C4), alors

$$A_i = A_j \qquad (\forall j) \quad (\forall i)$$

Donc (Cf. V - A2), A est booléenne, et $A^{-1} = {}^tA$.

Cette propriété va permettre d'établir, comme Blyth ([B5]) pour les matrices booléennes, que :

Théorême [V-C5]

Une matrice carrée de $M_n\left(\Delta^{(r-1)}(B)\right)$ est diagonalisable seulement si elle est diagonale.

Preuve

De la même façon que dans [B5], s'il existe P inversible et D diagonale telle que

$${}^tP\,A\,P = D \text{ alors } A = P\,D\,{}^tP$$

.../...

et $$a_{ij} = \bigvee_{k,\ell} p_{ik}\, d_{k\ell}\, p_{j\ell} = \bigvee_{k} \lambda_k\, p_{ik}\, p_{jk} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Ce décevant théorême interdit d'espérer réduire les matrices postiennes à la forme diagonale par similitude.

Théorême [V - C6]

Pour que, avec les hypothèses et les notations ("mutatis mutandis") de II - A :

$$A \otimes X = 0 \qquad \text{implique } X = 0,$$

Il faut et il suffit que A soit "booléenne" et p.o.g.

Preuve

$$A \otimes X = 0 \iff X \leqslant \langle A, 0 \rangle$$

et $$\langle A, 0 \rangle = 0 \iff \langle A, 0 \rangle_i = 0 \qquad (\forall i)$$

or $$\langle A, 0 \rangle_i = \prod_{k \geqslant i} \langle A_k, 0 \rangle = \langle A_{r-1}, 0 \rangle = 0$$

Les composantes booléennes sont toutes égales ce qui prouve que A est booléenne. De plus la dernière relation montre que la composante A_{r-1} doit être p.o.g.

Dans le théorême qui suit et qui est relatif aux équations matricielles postiennes linéaires $X \in M_{n,p}(\Delta^{(r-1)}(B))$, $A \in M_{m,n}(\Delta^{(r-1)}(B))$; $B \in M_{m,p}(\Delta^{(r-1)}(B))$. On obtient un résultat analogue à [I - A5].

.../...

Théorême [V - C7]

Une condition nécessaire et suffisante pour que

$A \otimes X = B$ admette des solutions

est que $A \otimes \langle A,B \rangle = B$ Toute solution est alors inférieure ou égale à $\langle A,B \rangle$

Preuve

On se donne $X \in M_{n,p}\left(\Delta^{(r-1)}(B)\right)$; $A \in M_{m,n}\left(\Delta^{(r-1)}(B)\right)$

$$X = (X_1, \ldots, X_{r-1})$$

$$A = (A_1, \ldots, A_{r-1})$$

Alors, pour chaque composante booléenne, on a :

$$X_i \leqslant \langle A_i, A_i \otimes X_i \rangle$$

et donc, puisque :

$$X_i \leqslant X_j \qquad (j \geqslant i)$$

$$X_i \leqslant \bigwedge_{k \geqslant i} \langle A_k, A_k \otimes X_k \rangle = \langle A, A \otimes X \rangle_i$$

Donc

$$X \leqslant \langle A, A \otimes X \rangle \qquad (V - C5)$$

Les conclusions de [V - C2] s'écrivant:

$$A \otimes \langle A,B \rangle \leqslant B \qquad (\forall A)\ (\forall B)$$

Ces deux conditions impliquent la conclusion annoncée, comme en [I - A5].

.../...

D - Problèmes de valeurs propres et de vecteurs propres -

On définit pour $\lambda \in \Delta^{(r-1)}(B)$; $A \in M_n(\Delta^{(r-1)}(B))$ la matrice λA comme en (I - C).

Alors si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1})$ $\quad A = (A_1, \ldots, A_{r-1})$

$$(\lambda A)_{i,j} = \lambda a_{ij} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1})\,(a_{ij}^{(1)}, \ldots, a_{ij}^{(r-1)})$$

$$= (\lambda_1 a_{ij}^{(1)}, \ldots, \lambda_{r-1} a_{ij}^{(r-1)})$$

et donc $(\lambda A) = (\lambda_1 A_1, \ldots, \lambda_{r-1} A_{r-1})$ qui fournit un complément au théorême [V - C1].

L'équation aux valeurs propres

$$A \otimes x = \lambda x \qquad (V - D1)$$

est donc équivalente au système de (r-1) équation matricielles booléennes

$$A_i \otimes x_i = \lambda_i x_i \qquad i \in [1, r-1] \qquad (V - D2)$$

assorti des contraintes :

$$A_i \leqslant A_{i+1} \; ; \quad x_i \leqslant x_{i+1} \; ; \quad \lambda_i \leqslant \lambda_{i+1} \qquad (\forall i)$$

Si x est solution de (V - D1) pour λ, chaque x_i est solution de (V - D2) pour λ_i, et donc d'après [IV - A1], également pour :

$$J_i = [j(x_i), m(x_i)].$$

Les conditions $j(x_i) \leqslant \lambda_i \leqslant m(x_i)$ et $\lambda \in M_{n,1}(\Delta^{(r-1)}(B))$ sont celles du théorême [V - A4].

.../...

D'après l'expression de $j(x_i) = {}^t e \otimes A_i \otimes x_i$

il résulte que

$$j(x_1) \leqslant j(x_2) \leqslant \ldots\ldots\ldots\ldots \leqslant j(x_{r-1})$$

et les conditions (V - A3) s'écrivent ici simplement

$$j(x_i) \leqslant m(x_i) \qquad (V - D3)$$

qui sont vérifiées si x est solution. Alors l'ensemble des λ solutions forme un intervalle de $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$ (cf. V - A5)

Théorème [V - D1]

Si x est vecteur propre de A, alors l'ensemble des valeurs propres associées à x est un intervalle $[u(x), v(x)]$ de $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$

$$\left[u(x)\right]_k = \prod_{j \geqslant k} \left[({}^t e \otimes A_j \otimes x_j) \vee \overline{{}^t e \otimes x_j}\right] \qquad (V - D4)$$

$$\left[v(x)\right]_k = {}^t e \otimes A_k \otimes x_k \qquad (V - D5)$$

Examinons maintenant le problème des pseudo-modules propres attachés à une valeur propre λ, d'après les résultats du [IV - B3]

Théorème [V - D2]

L'ensemble des $x \in M_{n,1}(\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B}))$ tels que

$$A \otimes x = \lambda x \qquad (V - D6)$$

est, pour λ fixé dans $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$, un pseudo-module M_λ contenant

.../...

un élément maximum $\hat{x}(\lambda)$ avec

$$\hat{x}_i(\lambda) = \prod_{k \gg i} \left\{ \lambda_k \left[(A_k)^n \otimes e \right] \vee \overline{\lambda_k} \langle A_k, 0 \rangle \right\} \qquad (V - D7)$$

Preuve

M_λ est manifestement un $\Delta^{(r-1)}(B)$ - p. m. Par ailleurs

$$A_i \otimes x_i = \lambda_i x_i$$

implique que $\quad x_i \backslash\!\backslash x_i^*(\lambda) = \lambda_i \left[(A_i)^n \otimes e \right] \vee \overline{\lambda_i} \quad \langle A_i, 0 \rangle$

La plus grande solution éventuelle de (V - D6) est donc ici, d'après (IV - B3)

$$\hat{x}_i(\lambda) = \prod_{k \geqslant i} \left\{ \lambda_k \left[(A_k)^n \otimes e \right] \vee \overline{\lambda_k} \langle A_k, 0 \rangle \right\}$$

or $\hat{x}(\lambda) = (\hat{x}_1(\lambda), \ldots\ldots, \hat{x}_{r-1}(\lambda))$ est effectivement solution.

En effet

$$\left[A \otimes \hat{x}(\lambda) \right]_i = \left[A_i \otimes \hat{x}_i(\lambda) \right] = \lambda_i \left[(A_i)^{n+1} \otimes e \right] .$$

$$\left\{ \prod_{k \geqslant i+1} \left[\lambda_k \left[(A_k)^n \otimes e \right] \vee \overline{\lambda_k} \langle A_k, 0 \rangle \right] \right\}$$

et $\quad (A_i)^{n+1} \otimes e = (A_i)^n \otimes e$. Par ailleurs

$$\lambda_i \hat{x}_i(\lambda) = \lambda_i \left((A_i)^n \otimes e \right) \left[\prod_{k \gg i+1} \lambda_k \left[(A_k)^n \otimes e \right] \vee \overline{\lambda_k} \langle A_k, 0 \rangle \right]$$

(c.q.f.d.)

.../...

Corollaire

Pour que λ ne soit pas valeur propre de A, il faut et il suffit que

$$\overset{\wedge}{\chi}_{r-1}(\lambda) = 0$$

Donc

$$\lambda_{r-1}\left[(A_{r-1})^n \otimes e\right] \vee \overline{\lambda_{r-1}}\ \langle A_{r-1}, 0\rangle = 0$$

ceci implique que A_{r-1} doit être singulière dans $M_n(\mathcal{B})$ et que

$$\lambda_{r-1} = \Omega(A_{r-1}) \qquad (V - D8)$$

Soit $S_n(\mathcal{B})$ l'ensemble des matrices singulières dans $M_n(\mathcal{B})$.

Alors, pour chaque U appartenant à $S_n(\mathcal{B})$, l'ensemble (*) des

$$T = (X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{r-2}, U) \in M_n(\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B}))$$

est constitué de matrices singulières dans $M_n(\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B}))$; Pour chaque T l'ensemble (*) des λ de la forme

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_{r-2}, \Omega(U)) \in \Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$$

(qui est un sous-treillis de $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{B})$) n'est pas valeur propre de T.

(*) qui est donc isomorphe à une Algèbre de Lukasiewicz (r-1) - valente

E - Théorême d'Hamilton Cayley -

La définition du polynôme caractéristique d'une matrice ne peut se faire dans un treillis ou une algèbre de Boole par la voie usuelle, faute de pouvoir symétriser la disjonction.

Rutherford a défini l'équation caractéristique d'une matrice A, à éléments dans un semi-anneau, par (*) :

$$\lambda^n \vee \Pi_2 \lambda^{n-2} \vee \gamma_3 \lambda^{n-3} \vee \ldots = \Pi_1 \lambda^{n-1} \vee \gamma_2 \lambda^{n-2} \vee \Pi_3 \lambda^{n-3} \vee \ldots$$

(V - E1)

où le dernier terme à gauche est γ_n si n est impair, Π_n si n est pair (resp. Π_n et γ_n à droite).

Pour tout k : $1 \leqslant k \leqslant n$, Π_k (resp. γ_k) est la disjonction de tous les termes provenant des mineurs principaux d'ordre k (du déterminant de A) et correspondant à des permutations paires (resp. impaires) dans le développement de ce mineur. (**)

Cette définition, quelque peu lourde, est néanmoins compatible avec celle qui est usuelle dans les anneaux. Rutherford a alors montré ([R7]) que toute matrice à éléments dans un semi-anneau satisfait son équation caractéristique, et a appliqué cette propriété aux matrices booléennes ; elle est naturellement applicable aux matrices à éléments dans une Algèbre de Post. Nous nous proposons d'établir ici un résultat concernant l'ensemble des solutions de l'équation caractéristique d'une matrice postienne A.

(*) Nous reprenons ici les notations de ([R7])

(**) les déterminants considérés, lorsqu'il s'agira de matrices booléennes sont les déterminants usuels et non ceux de Wedderbrun.

.../...

L'ensemble des résultats de [R7] peut être résumé comme suit, pour une matrice booléenne A. L'équation (V - E1) est équivalente à :

$$\lambda^n {}_v\sigma = \lambda\rho_v \tau \qquad \text{(V - E2)}$$

où $\sigma = \gamma_n$ (n impair) ou $\overline{\Pi}_n$ (n pair)

$\rho = \overline{\Pi}_1 \vee \gamma_2 \vee \overline{\Pi}_3 \vee \cdots\cdots \vee \cdots\cdots (\gamma_{n-1}$ si n pair; $\overline{\Pi}_{n-1}$ si n impair)

$\tau = \gamma_n$ (si n est pair) ou $\overline{\Pi}_n$ (n impair)

on a $\sigma \ll \rho$ [cf. [R5]]

Alors les solutions de (V - E2), qui est toujours compatible, sont fournies par :

$$\sigma \oplus \tau \ll \lambda \ll \rho \vee \tau = \bar{\Omega}(A). \qquad \text{(V - E3)}$$

Donc

Théorème [V-E1]

L'ensemble des solutions de l'équation caractéristique d'une matrice de $M_n(\Delta^{(r-1)}(B))$ est un intervalle $[\lambda', \lambda^*]$ de $\Delta^{(r-1)}(B)$ avec :

$$\lambda^*_k = \overline{\Omega(A_k)}$$

$$\lambda'_k = \bigvee_{j \ll k} (\sigma_j \oplus \tau_j)$$

L'ensemble des solutions n'est, en effet, jamais vide, puisque λ^* appartient à $\Delta^{(r-1)}(B)$. On applique alors [V - A3].

B I B L I O G R A P H I E

-:-:-:-:-:-

ANDREOLI (G)

[A1] Un problème de partitions d'ensembles et certains systèmes symétriques d'équations booléennes (Giornale Math. Ital. 1963 91 p 5-23) (en italien).

AITKEN (A.C)

[A2] Determinants and matrices (Oliver and Boyd) London 1964.

BERGE (C1)

[B1] Graphes et hypergraphes (Dunod) Paris 1970

BERNSTEIN (B.A) et Parker (W.L)

[B2] On Uniquely solvable boolean Equations (Univ. Calif. Publ. Math (N.S) 3) N° 1 (1955) (1-30).

BOIESCU (Vlad)

[B3] Sur la représentation des Algèbres de Lukaslewicz n-valentes (C.R.A. Sciences Paris 5/1/1970 tome 270).

BIRKHOFF (G) Lattice Theory

[B4] American Math. Soc. Colloquium Publicat. Vol 25.

..../....

BLYTH (Th.)

[B5] Une question ouverte sur la similitude des matrices de Boole (C.R.A.S) t : 266 (6/05/1968) p 963-965.

[B6] On isotone homomorphic Booléan Images of Ordered semi-groups (Proc. Royal. Soc. Edinb.) (Vol L XVIII Part III N° 14 p : 211 - 228).

[B7] On eigenvectors of Boolean Matrices (Proc. Royal. Soc. Edinb.) Vol LXVII. Part III N° 14 p. 196-204).

[B8] Residuation Theory and Boolean Matrices (Proc. Royal. Soc. Edinb.) Vol 6 Part 4 Juillet 1964.

[B9] Λ - distributive Boolean Matrices.

CIGNOLI (R)

[C1] Boolean Elements in Lukasiewicz Algebras(I)

CIGNOLI (R) et MONTEIRO (A)

[C2] Boolean Elements in Lukasiewicz Algebras(II) Proc. Japan Academy Vol 41 (1965)

CARVALLO (M)

[C3] Monographie des treillis et Algèbre de Boole (Gauthier Villars Paris 1966)

[C4] Principes et Applications de l'analyse Booléenne (Gauthier Villars - Paris 1965).

.../...

[C5] Logique à trois valeurs, logique à seuil (Gauthier - Villars Paris 1968).

[C6] Thèse de Doctorat ès-Sciences Mathématiques (Paris Dec. 1969).

DUBREIL (P) et DUBREIL - JACOTIN (M.L)

[D1] Leçons d'Algèbre Moderne (Dunod Paris 1964

EPSTEIN (G)

[E1] The lattice Theory of Post Algebras (Trans. Math. Americ. Soc. 95 (1960) p 300 - 317).

FOSTER

[F1] p - Rings and Their Boolean-vector representations (Acta Mathematica Vol 84 N° 3-4 1951 p. 231-261).

[F2] On n-ality theories in rings and their logical Algebras including tri-ality principle in three = valued logics. (Amer. Math. J. Vol 72 1950 p 101-123).

GRILLET (P.A)

[G1] Translations and congruences in Lattices (Acta Math. Scientarum Hungaricae) Tome 19 1968 p : 147 - 162

.../...

HALMOS (P.R)

[H1] Lectures on Boolean Algebras (Van Nostrand), Princeton 1967.

JOHNSSON (B) et TARSKI (A)

[J1] Boolean Algebras with operators (Part I et II) American J. Math. vol 73 (1951) p 89 - 939 et vol 74 (1952) p. 127-162).

KUNTZMANN (J)

[K1] Algèbre de Boole (Dunod), Paris 1965.

KUNTZMANN (J) et NASLIN (P)

[K2] Algèbres de Boole et Machines logiques (Dunod) Paris 1967.

L'ABBE (M)

[L1] Structures Algébriques suggérées par la Logique Mathématique (Bull. Soc. Math. Fr. 1958 T 86 Fasc.IV) . Réunion des Math. d'expression latine).

LA MACCHIA et ABIAN

[L2] Examples of generalized Sheffer Functions (Acta Mathematica studiarum Hungaricae Tome 18 1967. p 189-190.

LUKASIEWICZ (J)

[L3] Elements of Mathematical logic Pergamon - PWN - Varsovie (1966).

.../...

MAC KINSEY (J.C)

[M1] Postulates for the calculus of binary relations.

The Journal of Symbolic Logic (Vol 5 N° 3, Sept 1940).

MAC COY (N,H) ET MONTGOMERY (D)

[M2] A representation of generalized Boolean rings.

MAUTNER (F.I)

[M3] An Extension of Klein's Erlanger Program : Logic as invariant theory.

The many Facets of Graph Theory

[M4] Springer-Verlag (Berlin) 1969.

MENDELSON

[M5] Introduction to Mathematical Logic Van Nostrand (Princeton) 1963.

MOISIL (G)

[M6] Theorie Structurelle des automates finis Gauthier Villars (Paris) 1967.

[M7] Le Algèbre di Lukasiewicz (Acta Logica Vol [illegible] 196.).

.../...

PETEANU (V)

[P1] Optimal Paths in Networks and Generalization (I) (Mathemat. Vol 11 (34) 2,1969 p 311-327).

PIERCE (R)

[P2] Introduction to the theory of Abstract Algebras. Holt Rinehart and Winston

POST (E.L)

[P3] Introduction to a general theory of elementary propositions (Journal of Math. Americ.) 1921 T. 43 ; p 163-185.

PULLMANN (N.J)

[P4] A property of infinite products of Boolean matrices: S.I.A.M. J. APPL. Math. U.S.A. 1967 - 15 N° 4;871 - 873.

ROSENBLOOM (P.C)

[R1] Post Algebras : Postulates and general theory. Amer J. Math. Vol 64-1942 (p 167-188).

RUDEANU (S) et Hammer (R)

[R2] Boolean Methods in operations Research Springer-Verlag (Berlin) 1968.

.../...

RUTHERFORD (D.E)

| R3 | Introduction to lattice theory (Oliver and Boyd) (1965) (Edinburgh and London).

| R4 | Orthogonal Boolean Matrices. Proc. Roy. Soc. Edinb.) 1965 p : 126-135.

| R5 | The Eigenv. Problem for Boolean Matrices. (Proc. Royal Soc. Edinb.) 1965 p : 25-38.

| R6 | Inverses of Boolean Matrices. Proc. Glasg. Math. Ass. 6 - p (49-53) 1963.

| R7 | The Hamilton Cayley Theorem for Semi-Rings (Proc. Roy. Soc. Edinb.) A 66p 211+225 (1964)

SERFATI (M) Cours d'Algèbres de Boole et théorie des Graphes (Ecole des Travaux Publics). Cours Polycoplé .

SIKORSKI (R) Boolean Algebras

| S1 | Springer-Verlag (Berlin) 1964

SUBRAHMANYAM (N.V) Boolean Vector Spaces (1)

| S2 | Math, Z; Dstch. 1964 83 n° 5;422- 33.

Theory and Applications of Generalized Inverses of Matrices

| T1 | (Proced. of the sympos. March 1968) BOULLION and ODELL.

WEBB (D.C.)

| W1 | Generation of any n-valued logic by one binary operation.

WEDDERBRUN (J.H.M)

| W2 | A note on linear Boolean Associative Algebra. Am. Math Princeton (1934)35; 185-194.